جامعة البعث
كليــة العلوم

امتحان مقرر الميكانيك 3

السنة الثالثة رياضيات– الفصل الأول 2014 - 2013

اسم الطالب:

العلامة: 100 (مائة درجة)

المدة: ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول (30)

إذا كان الجسم الصلب يتحرك في الفضاء الثلاثي الأبعاد حول نقطة ثابتة منه O، فاثبت أن:

$$2T_0 = A\, p_s^2 + B\, q_s^2 + C\, r_s^2 - 2D\, q_s r_s - 2E\, p_s r_s - 2F\, q_s p_s$$

السؤال الثاني (34)

إذا كانت الصفيحة الصلبة المربعة المتجانسة التي طول ضلعها L وكتلتها m، تتحرك تحت تأثير ثقلها في المستوي الشاقولي وكان أحد رؤوسها ثابتاً مايلي:

1. أوجد الوسطاء المستقلة مع الرسم الواضح.
2. أوجد المعادلات التفاضلية للحركة.
3. أوجد القانون الزمني للحركة، علماً أنه في لحظة البدء كان قطر الصفيحة المار من الرأس الثابت يميل بزاوية α عن المحور الشاقولي النازل وتحركت الصفيحة بدون سرعة ابتدائية.

السؤال الثالث (36)

يتحرك، في الفضاء الثلاثي الأبعاد، مخروط دوراني قائم صلب وثقيل، كتلته m ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه $h = \sqrt{3} \cdot R$، علماً أن رأسه O ثابت وأن عزم عطالته بالنسبة لرأسه O يساوي: $\frac{21\, m R^2}{10}$ وعزم عطالته بالنسبة لمحور تناظره الهندسي يساوي: $\frac{3\, m R^2}{10}$، فالمطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب موضحاً عليه الوسطاء المستقلة والقوى المؤثرة على هذا الجسم.
2. أوجد $\vec{\sigma}_0$ بدلالة مركبات متجه الدوران على المحاور المتماسكة مع المخروط، ثم أوجد عزم القوى المؤثرة عليه بالنسبة لـ O.
3. أوجد مسقط $\vec{\sigma}_0$ على محور التناظر الهندسي للمخروط ثم أوجد مسقط $\vec{\sigma}_0$ على الشاقول، كل ذلك بدلالة مركبات متجه دوران المخروط على المحاور المتماسكة معه.
4. أوجد الطاقة الحركية T_0 ثم أوجد عمل القوى المؤثرة على المخروط.

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ———— مدرس المقرر: د.كامل محمد

جامعة البعث
كلية العلوم

سلم تصحيح مقرر الميكانيك ٣
دورة الفصل الأول ٢٠١٣-٢٠١٤
تاريخ ١٠/٢/٢٠١٤

(3)

38 ج:

- الوسطاء المستقلة موضحة بالرسم.

الحركة دورانية لجسم صلب ثقيل حول نقطة ثابتة منه فتلزمنا ثلاثة وسطاء مستقلة هي زوايا أولر الموضحة بالرسم المجاور.

(16)

الزاوية φ دوران المبادرة حول الشاقول OZ.

θ دوران الترنح حول خط الأفق OX_1.

ψ " دوران ذاتي حول المحور OZ_1.

حيث $OXYZ$ جملة مقارنة نظامية ثابتة (عطالية) فيها OZ شاقولي صاعد.

∴ $OX_sY_sZ_s$ جملة مقارنة نظامية متماسكة مع الكرة فيها OZ_1 محور قطري. OX_1 خط الأفق (العقد).

- معادلات أولر التحريكية: يتضح من الفرض أن الجملة $OX_1Y_1Z_1$ جملة محاور أساسية للعطالة لأن OX_1Z_1 مستوي تناظر (هندسي) أي أن $P_{x_1y_1} = P_{y_1z_1} = 0$ والمستوي OY_1Z_1 مستوي تناظر هندسي للكرة والجسم متجانس أي أن

$$P_{x_1y_1} = P_{y_1z_1} = 0$$

(9)

إذن يمكن تشكيل معادلات أولر التحريكية وهي:

$$\left.\begin{aligned} A\dot{p}_1 - (B-C)q_1r_1 &= L \\ B\dot{q}_1 - (C-A)p_1r_1 &= M \\ C\dot{r}_1 - (A-B)p_1q_1 &= N \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\substack{A=B=\frac{7}{5}ML^2 \\ C=\frac{2}{5}ML^2}]{\text{الجسم متناظر}} \begin{cases} \frac{7}{5}ML^2\dot{p}_1 - ML^2 q_1r_1 = MgL\gamma_2 \\ \frac{7}{5}ML^2\dot{q}_1 + ML^2 p_1r_1 = -MgL\gamma_1 \\ \frac{7}{5}ML^2\dot{r}_1 = 0 \end{cases}$$

حيث

$$\vec{Mom}_O(\vec{F}) = \vec{Mom}_O(m\vec{g}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = MgL\gamma_2\vec{i}_1 - MgL\gamma_1\vec{j}_1 + 0\vec{k}_1$$

$\gamma_1 = \sin\theta\sin\psi$, $\gamma_2 = \sin\theta\cos\psi$, $\gamma_3 = \cos\theta$ ومنه

$p_1 = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$, $q_1 = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$, $r_1 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$

- إيجاد التكاملات اللازمة:
- من مكاملة ثالث معادلة من معادلات أولر الحركية نحصل على:

$\dot{r}_s = 0 \Rightarrow r_s = C_1$ ، C_1 ثابت تكامل

ومن شروط البدء وعلاقات أولر الحركية نجد:

$$\boxed{\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \omega_0}$$ ---(1)

- تكامل الطاقة:

$T_0 = U + h$ ؛ h ثابت تكامل ، حيث الطاقة الحركية

نحسب U فنجد:

$$U = -MgL\cos\theta$$

نحسب T_0 فنجد:

$$T_0 = \frac{1}{10}ML^2[7(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + 2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2]$$

نعوض في علاقة تكامل الطاقة ونختزل نجد:

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{2}{7}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 = \frac{10g}{7L}\cos\theta + h_1$$

حيث $h_1 = \frac{10h}{7ML^2}$ نحسب h_1 من شروط البدء

ونعوض فنحصل على التكامل الأول الثاني وهو:

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = \frac{10g}{7L}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta)}$$ ---(2)

- تكامل انحفاظ العزم الحركي حول OZ حيث $OZ // m\vec{g}$

فعزمها بالنسبة لـ OZ معدوم أي:

أي أن:

$$\frac{d\sigma_{OZ}}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma_{OZ} = C_2 \Rightarrow \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{k} = C_2$$

$$A p_s \gamma_1 + B q_s \gamma_2 + C r_s \gamma_3 = C_2$$

وبتعويض شروط البدء وقيم γ_1 ، γ_2 ، γ_3 و p_s ، q_s ، r_s والاختزال

نحصل على التكامل الأولي الثالث والذي هو:

$$\boxed{\dot{\varphi}\sin^2\theta = \frac{2}{7}\omega_0(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta)}$$ (3)

62 : أجب عن السؤال النهائي. 31 + 31

أ- إيجاد التابع الزمني للحركة التي معادلتها:

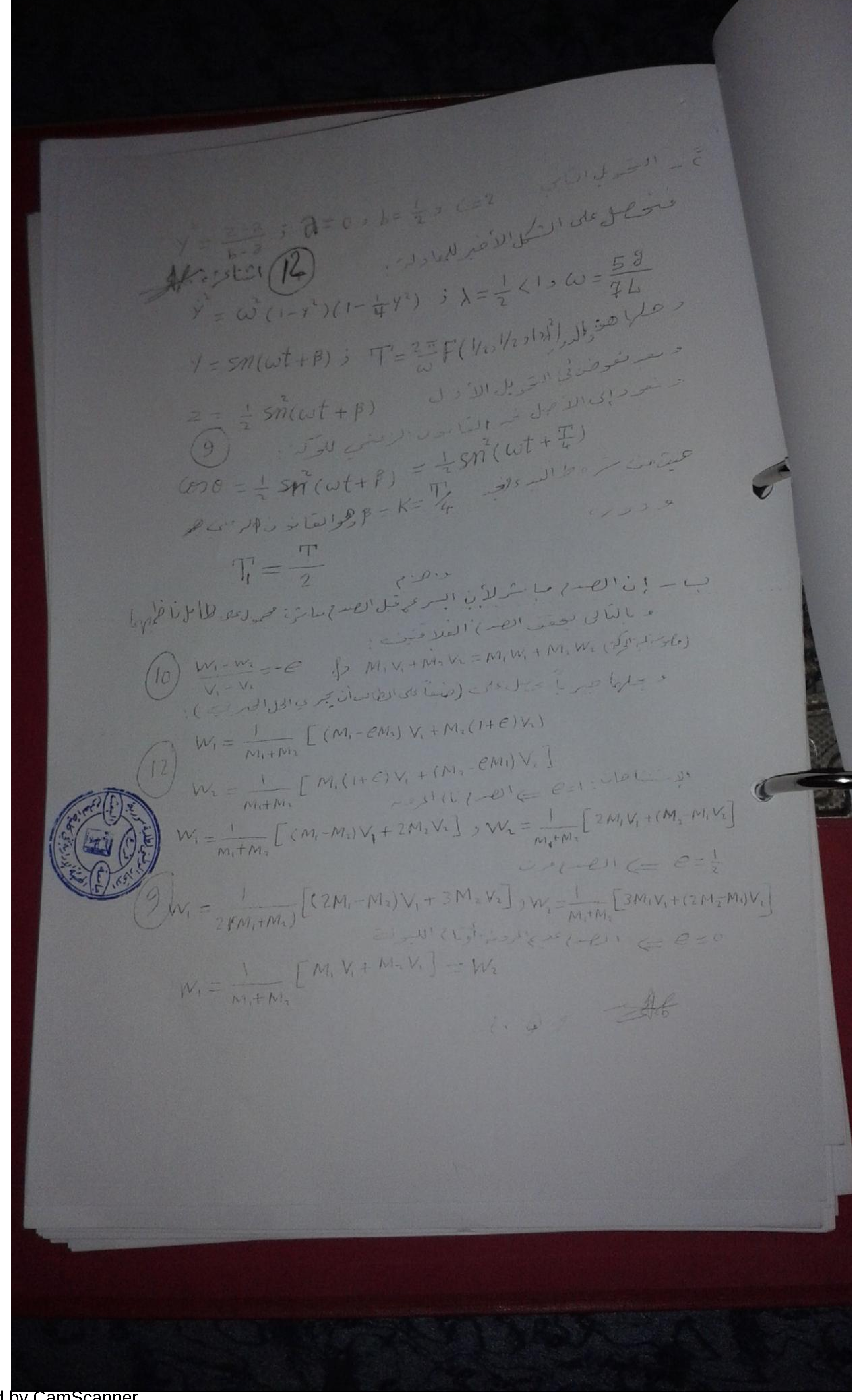
$$\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \frac{10g}{7L}\cos\theta(\cos\theta - \frac{1}{2})(\cos\theta - 2)$$

وبوضع الحل: نجد التحويل $Z = \cos\theta$ فنحصل على المعادلة:

$$\dot{Z}^2 = \frac{10g}{7L}Z(Z - 1/2)(Z - 2)$$

عشرة (10)

13



ج – التحويل الثاني

$y^2 = \frac{z-a}{b-a}$; $a = 0 , b = \frac{1}{2} , c = 2$

فنحصل على الشكل الأخير للمعادلة:

(12)

$\dot{y}^2 = \omega^2 (1-y^2)(1-\frac{1}{4}y^2)$; $\lambda = \frac{1}{2} < 1 , \omega = \frac{5g}{7L}$

وحلها هو والدور

$y = sn(\omega t+\beta)$; $T = \frac{2\pi}{\omega} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda^2)$

وبعد نعوض في التحويل الأول ونعود إلى الأصل نجد القانون الزمني للحركة:

$z = \frac{1}{2} sn^2(\omega t + \beta)$

(9)

$\cos\theta = \frac{1}{2} sn^2(\omega t+\beta) = \frac{1}{2} sn^2(\omega t + \frac{T}{4})$

حيث من شروط البدء نجد $\beta - K = \frac{T}{4}$ وهو القانون الزمني

$T_1 = \frac{T}{2}$

ب – إن الصدم مباشر لأن السرعتين قبل الصدم مباشرة محمولتان على الخط الواصل بين مركزيهما وبالتالي يحقق الصدم العلاقتين:

(10) $\frac{W_1 - W_2}{V_1 - V_2} = -e$, $M_1 V_1 + M_2 V_2 = M_1 W_1 + M_2 W_2$ (مصونية الحركة)

وبحلهما جبرياً نحصل على (ونترك للطالب أن يجري الحل الجبري):

(12)

$W_1 = \frac{1}{M_1+M_2}[(M_1 - eM_2)V_1 + M_2(1+e)V_2]$

$W_2 = \frac{1}{M_1+M_2}[M_1(1+e)V_1 + (M_2 - eM_1)V_2]$

الاستنتاجات: $e = 1 \Rightarrow$ الصدم المرن

$W_1 = \frac{1}{M_1+M_2}[(M_1-M_2)V_1 + 2M_2V_2]$, $W_2 = \frac{1}{M_1+M_2}[2M_1V_1 + (M_2 - M_1)V_2]$

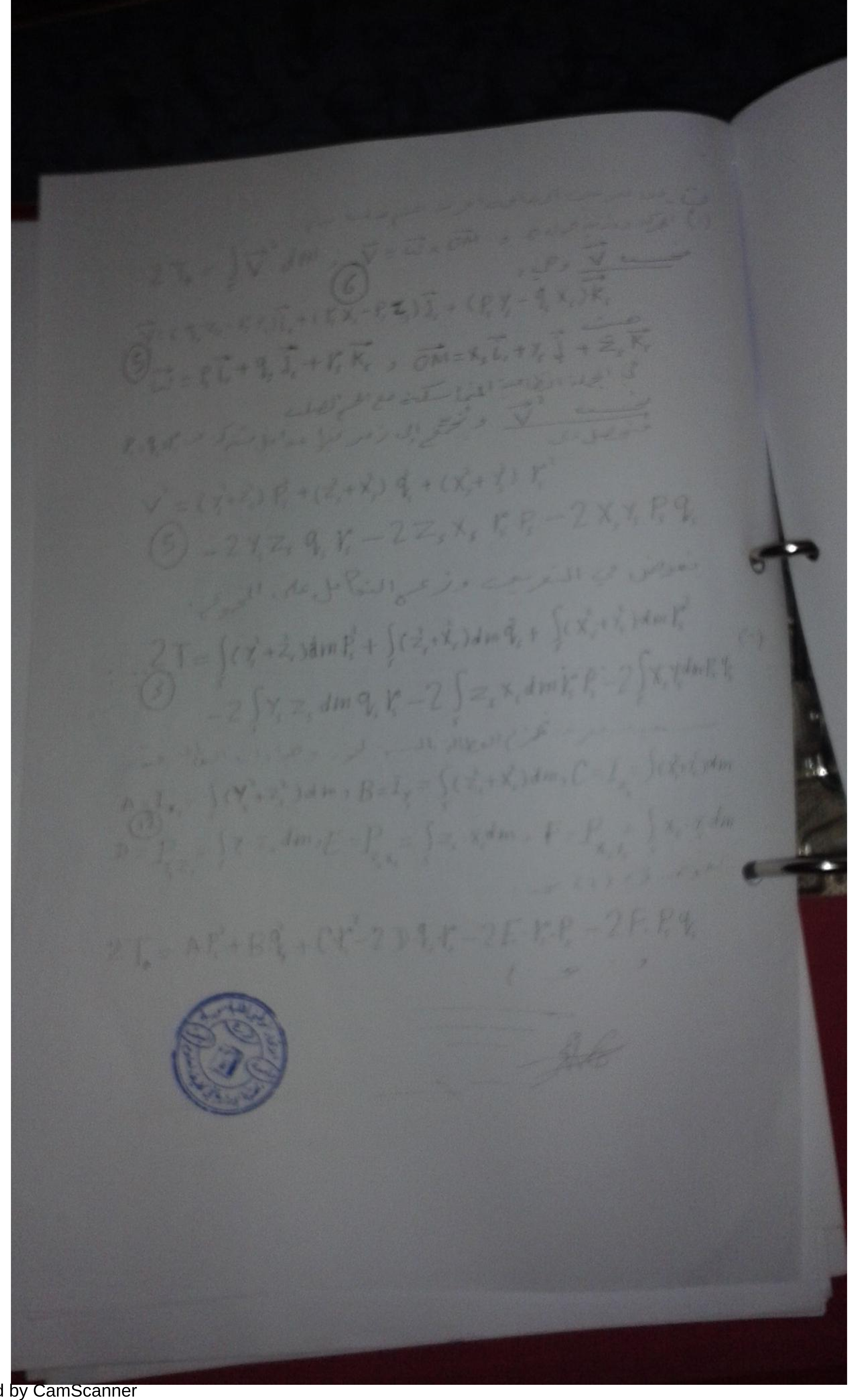
$e = \frac{1}{2} \Rightarrow$ الصدم المرن

(9)

$W_1 = \frac{1}{2(M_1+M_2)}[(2M_1 - M_2)V_1 + 3M_2V_2]$, $W_2 = \frac{1}{M_1+M_2}[3M_1V_1 + (2M_2 - M_1)V_2]$

$e = 0 \Rightarrow$ الصدم عديم المرونة أو اللدن

$W_1 = \frac{1}{M_1+M_2}[M_1V_1 + M_2V_2] = W_2$



$$2T_0 = \int \vec{V}^2\, dm \qquad (6)$$

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{OM}$$

$$\vec{\omega} = p_1\vec{i}_1 + q_1\vec{j}_1 + r_1\vec{k}_1 , \quad \vec{OM} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 \qquad (5)$$

$$\vec{V} = (q_1 z_1 - r_1 y_1)\vec{i}_1 + (r_1 x_1 - p_1 z_1)\vec{j}_1 + (p_1 y_1 - q_1 x_1)\vec{k}_1$$

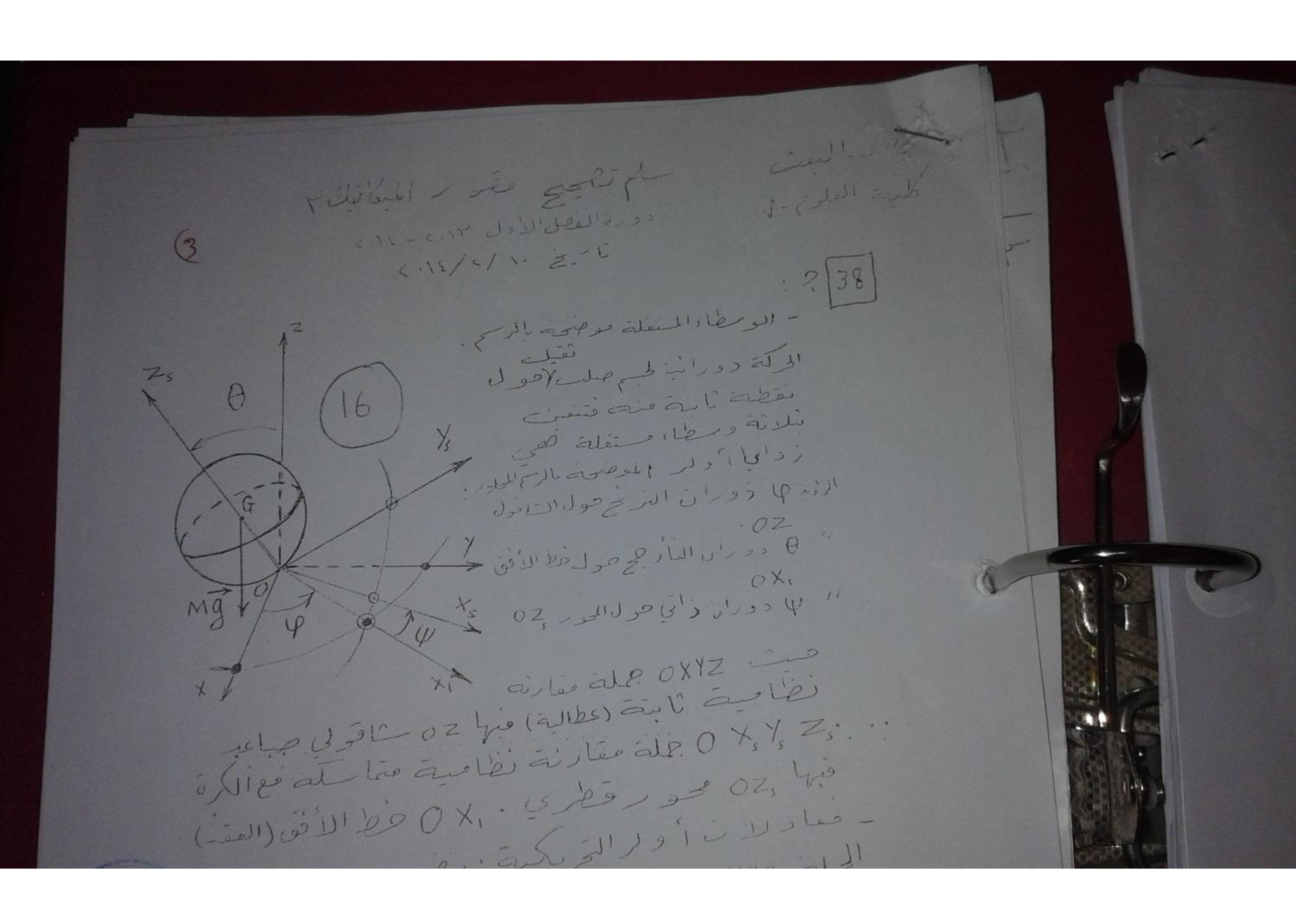
$$V^2 = (y_1^2+z_1^2)p_1^2 + (z_1^2+x_1^2)q_1^2 + (x_1^2+y_1^2)r_1^2 - 2x_1y_1p_1q_1 - 2y_1z_1q_1r_1 - 2z_1x_1r_1p_1 \qquad (5)$$

$$2T = \int (y_1^2+z_1^2)\,dm\, p_1^2 + \int (z_1^2+x_1^2)\,dm\, q_1^2 + \int (x_1^2+y_1^2)\,dm\, r_1^2 - 2\int y_1 z_1\, dm\, q_1 r_1 - 2\int z_1 x_1\, dm\, r_1 p_1 - 2\int x_1 y_1\, dm\, p_1 q_1 \qquad (3)$$

$$A = I_{x_1} = \int (y_1^2+z_1^2)\,dm , \quad B = I_{y_1} = \int (z_1^2+x_1^2)\,dm , \quad C = I_{z_1} = \int (x_1^2+y_1^2)\,dm$$

$$D = P_{y_1 z_1} = \int y_1 z_1\, dm , \quad E = P_{z_1 x_1} = \int z_1 x_1\, dm , \quad F = P_{x_1 y_1} = \int x_1 y_1\, dm \qquad (12)$$

$$2T_0 = A p_1^2 + B q_1^2 + C r_1^2 - 2D q_1 r_1 - 2E r_1 p_1 - 2F p_1 q_1$$



جامعة البعث
كلية العلوم - ...

سلم تصحيح مقرر الميكانيك ٣
دورة الفصل الأول ٢٠١٣ - ٢٠١٤
تاريخ ١٠/٢/٢٠١٤

(3)

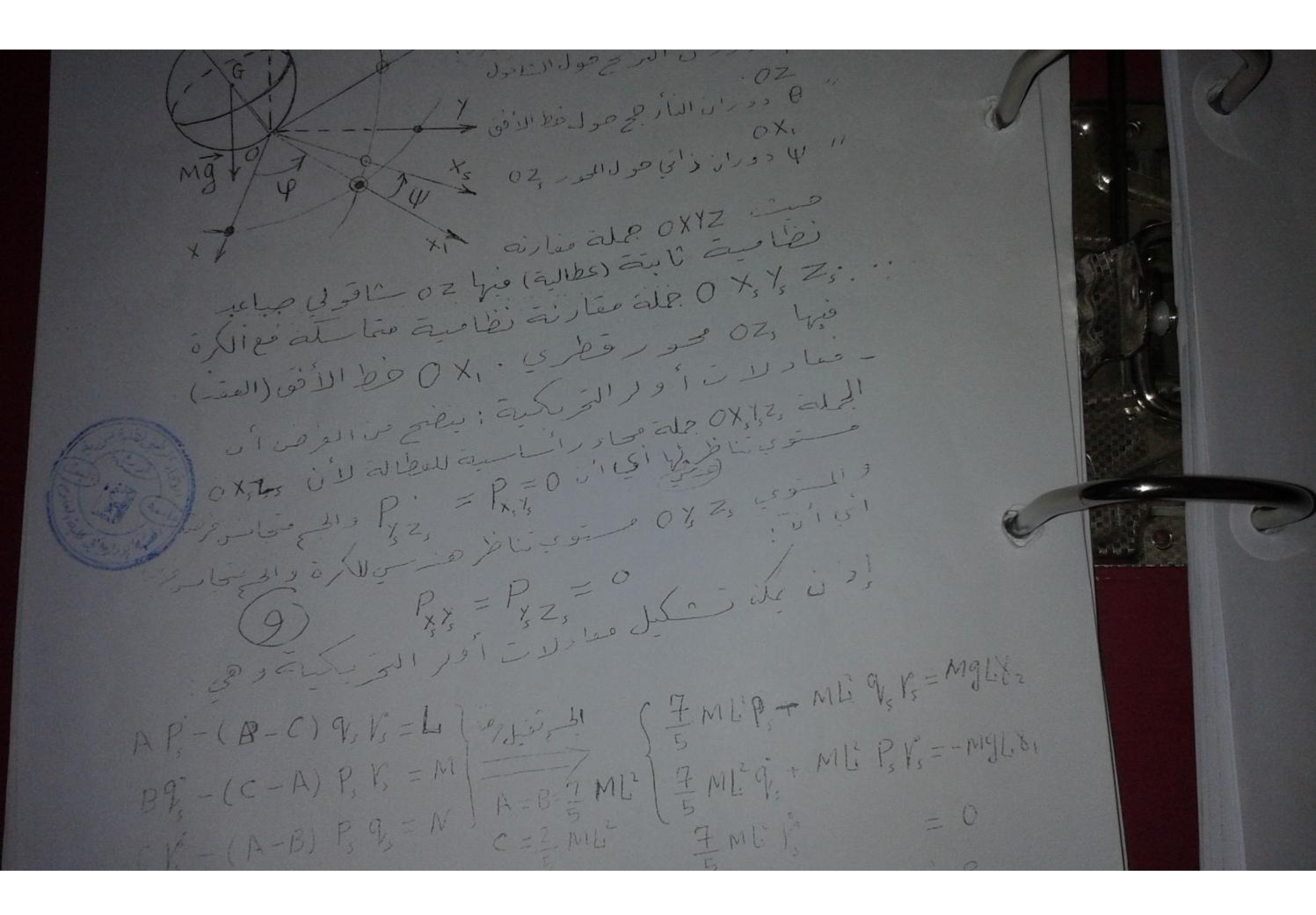
38 ؟ :

(16)

- الوسطاء المستقلة موضحة بالرسم.
الحركة دورانية لجسم صلب ثقيل حول نقطة ثابتة منه فتعين بثلاثة وسطاء مستقلة هي زوايا أولر الموضحة بالرسم المجاور:
الزاوية φ دوران الترنح حول الشاقول OZ.
" θ دوران التأرجح حول خط الأفق OX_1
" ψ دوران ذاتي حول المحور OZ_s

حيث OXYZ جملة مقارنة نظامية ثابتة (عطالية) فيها OZ شاقولي صاعد ∴ $O X_s Y_s Z_s$ جملة مقارنة نظامية متماسكة مع الكرة فيها OZ_s محور قطري . OX_1 خط الأفق (العقد)

- معادلات أولر التحريكية ...



... المترجح حول الشاقول OZ.

θ " دوران المترجح حول خط الأفق OX_1

ψ " دوران ذاتي حول المحور OZ_s

حيث: $OXYZ$ جملة مقارنة نظامية ثابتة (عطالية) فيها OZ شاقولي صاعد. $OX_sY_sZ_s$ جملة مقارنة نظامية متماسكة مع الكرة فيها OZ_s محور قطري. OX_1 خط الأفق (العقد)

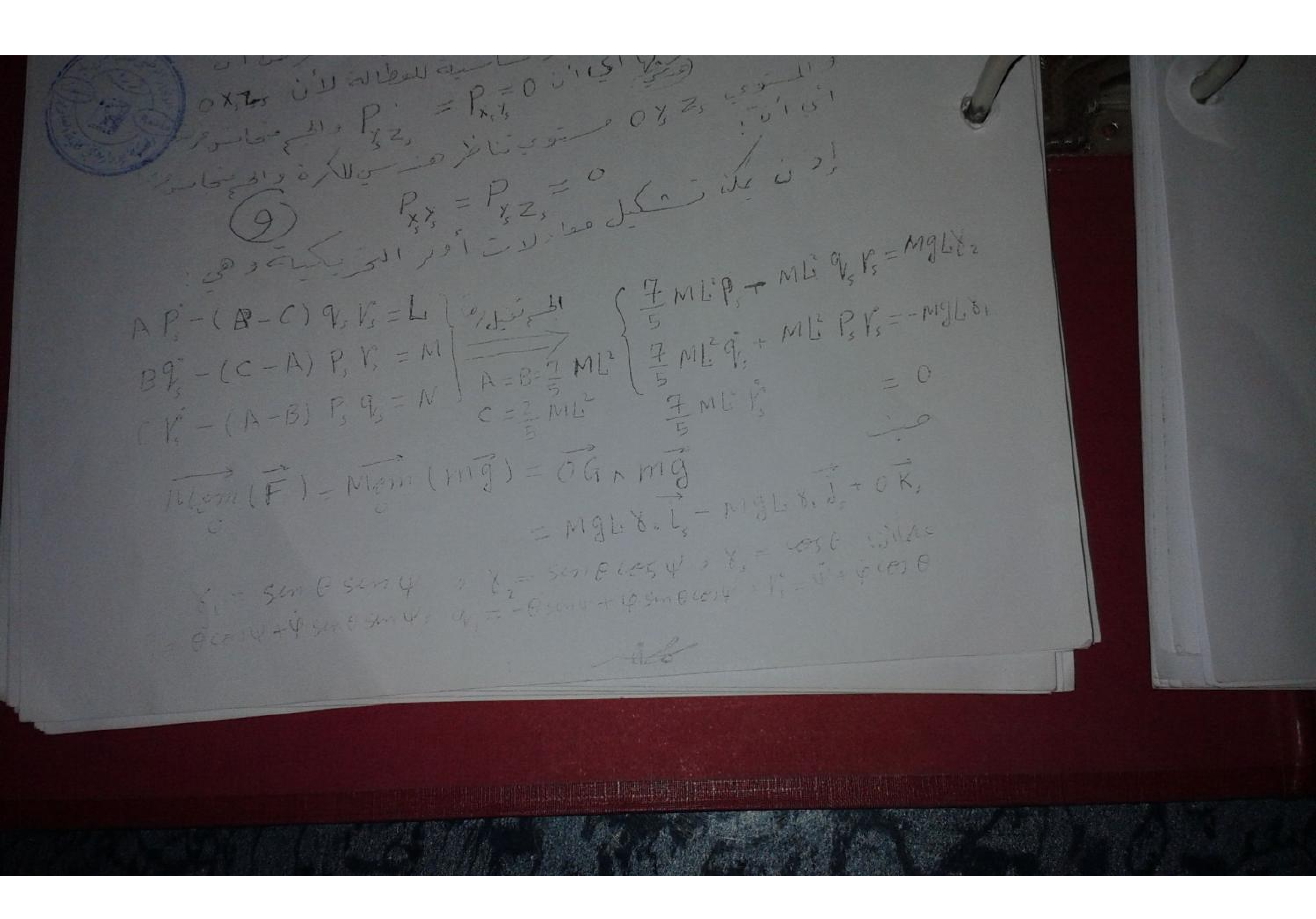
- معادلات أولر التحريكية: يتضح من الفرض أن الجملة $OX_sY_sZ_s$ جملة محاور أساسية للعطالة لأن OX_sZ_s مستوي تناظر هندسي أي أن $P_{X_sY_s} = P_{X_sY_s} = 0$ والمستوي OY_sZ_s مستوي تناظر هندسي للكرة والجسم متجانس أي أن: $P_{Y_sZ_s} = \ldots$

إذن يمكن تشكيل معادلات أولر التحريكية وهي:

$P_{X_sY_s} = P_{Y_sZ_s} = 0$

(9)

$$\begin{cases} A\dot{p}_s - (B-C)\,q_s r_s = L \\ B\dot{q}_s - (C-A)\,p_s r_s = M \\ C\dot{r}_s - (A-B)\,p_s q_s = N \end{cases} \xrightarrow[A=B=\frac{7}{5}ML^2,\ C=\frac{2}{5}ML^2]{\text{بعد التعويض}} \begin{cases} \frac{7}{5}ML^2\dot{p}_s - ML^2 q_s r_s = MgL\gamma_2 \\ \frac{7}{5}ML^2\dot{q}_s + ML^2 p_s r_s = -MgL\gamma_1 \\ \frac{7}{5}ML^2\dot{r}_s \ldots = 0 \end{cases}$$



... اسية للعطالة لأن Ox_sz_s ... أي أن

والمستوي Oy_sz_s ... $P_{y_sz_s} = P_{x_sy_s} = 0$

والجسم متجانس ... مستوي تناظر هندسي للكرة والجسم متجانس [illegible]

إذن يمكن تشكيل معادلات أولر الحركية وهي:

$$P_{x_sy_s} = P_{y_sz_s} = 0 \quad (9)$$

$$\begin{cases} A\dot{p}_s - (B-C)\, q_s r_s = L \\ B\dot{q}_s - (C-A)\, p_s r_s = M \\ C\dot{r}_s - (A-B)\, p_s q_s = N \end{cases}$$

الجسم متجانس ⟹ $A = B = \frac{7}{5}ML^2$, $C = \frac{2}{5}ML^2$

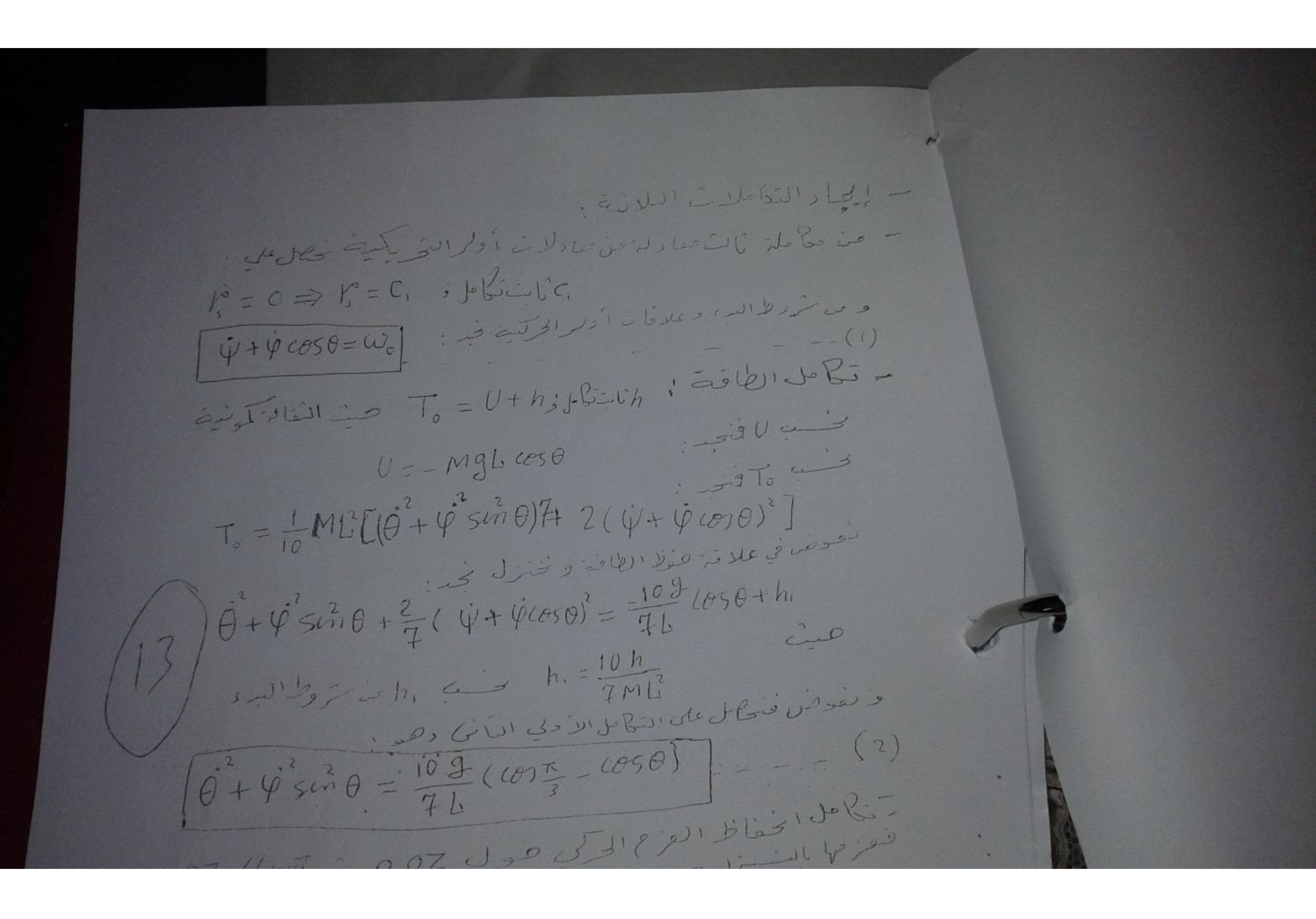
$$\begin{cases} \frac{7}{5}ML^2\dot{p}_s + ML^2 q_s r_s = MgL\gamma_2 \\ \frac{7}{5}ML^2\dot{q}_s + ML^2 p_s r_s = -MgL\gamma_1 \\ \frac{7}{5}ML^2\dot{r}_s = 0 \end{cases}$$

حيث

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{M}_O(m\vec{g}) = \vec{OG}\wedge m\vec{g} = MgL\gamma_2\,\vec{i}_s - MgL\gamma_1\,\vec{j}_s + 0\,\vec{k}_s$$

حيث $\gamma_3 = \cos\theta$, $\gamma_2 = \sin\theta\cos\psi$, $\gamma_1 = \sin\theta\sin\psi$

$r_s = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$, $q_s = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi$, $p_s = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi$



- إيجاد التكاملات اللازمة:
- من مكاملة ثالث معادلة من معادلات أولر التحريكية نحصل على:

$\dot{r}_3 = 0 \Rightarrow r_3 = C_1$; C_1 ثابت تكامل

ومن شروط البدء وعلاقات أولر الحركية نجد:

$$\boxed{\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \omega_0} \quad ---(1)$$

- تكامل الطاقة: $T_0 = U + h$; h ثابت تكامل ، حيث الطاقة الحركية

نحسب U فنجد:

$$U = -MgL\cos\theta$$

نحسب T_0 فنجد:

$$T_0 = \frac{1}{10}ML^2[(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)7 + 2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2]$$

نعوض في علاقة حفظ الطاقة ونختزل نجد:

13

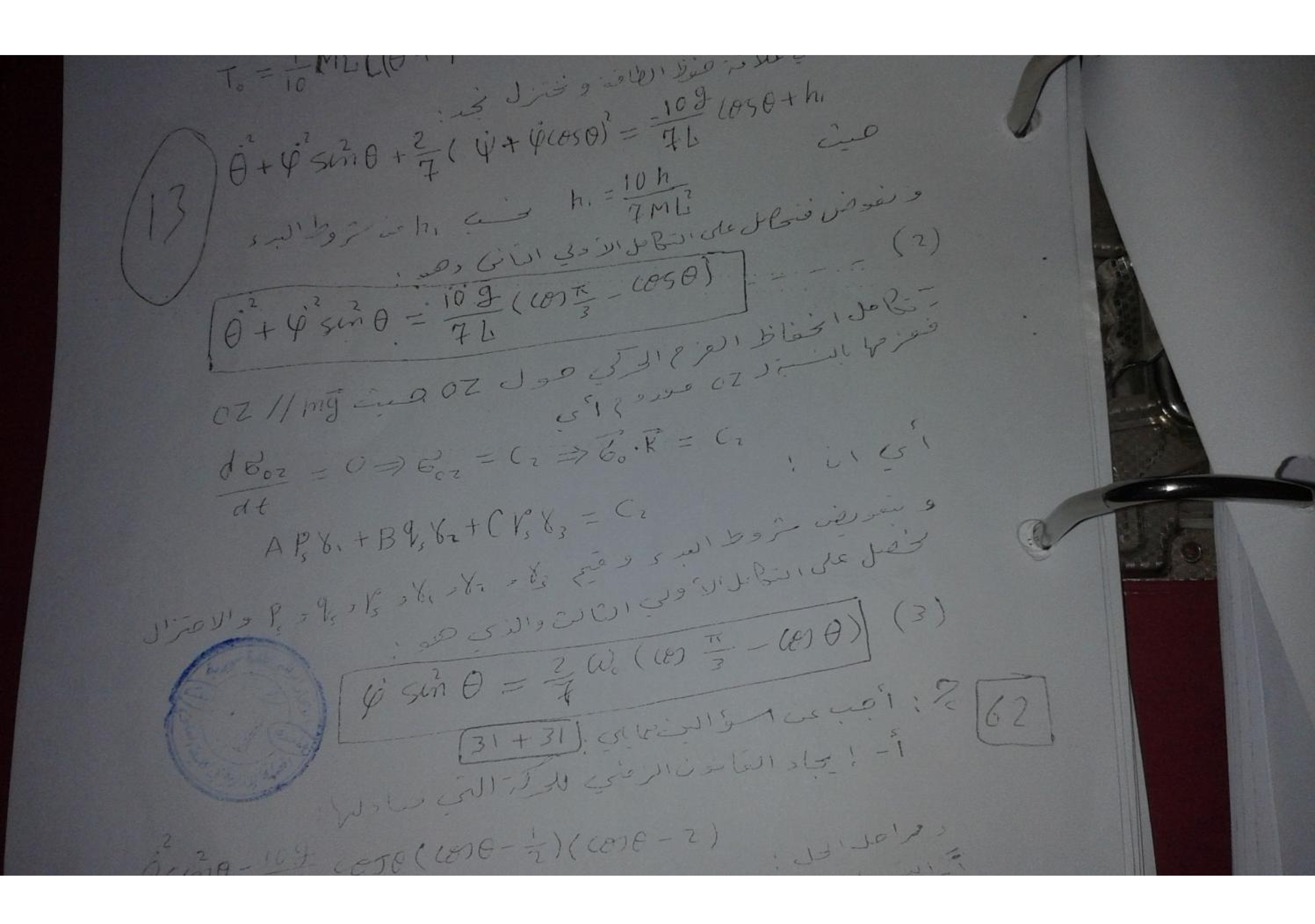
$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{2}{7}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 = -\frac{10g}{7L}\cos\theta + h_1$$

حيث $h_1 = \frac{10h}{7ML^2}$ نحسب h_1 من شروط البدء

ونعوض فنحصل على التكامل الأول الثاني وهو:

$$\boxed{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = \frac{10g}{7L}(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta)} \quad ---(2)$$

- تكامل انحفاظ العزم الحركي حول OZ



$T_0 = \frac{1}{10} M L (\dot\theta ...$

بالتعويض في قانون حفظ الطاقة و نختزل نجد :

13

$$\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta + \frac{2}{7}(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)^2 = \frac{-10g}{7L}\cos\theta + h_1$$

حيث $h_1 = \frac{10h}{7ML^2}$ نحسب h_1 من شروط البدء

ونعوض فنحصل على التكامل الأول الثاني وهو : (2)

$$\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta = \frac{10g}{7L}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta\right)$$

تكامل انحفاظ العزم الحركي حول OZ حيث $OZ \parallel m\vec{g}$

فعزمها بالنسبة لـ OZ معدوم أي

أي ان :

$$\frac{d\sigma_{OZ}}{dt} = 0 \Rightarrow \sigma_{OZ} = C_2 \Rightarrow \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{k} = C_2$$

$$A p_s \gamma_1 + B q_s \gamma_2 + C r_s \gamma_3 = C_2$$

وبتعويض شروط البدء وقيم γ_1 ، γ_2 ، γ_3 ، γ_1 ، γ_2 ، r_s ، q_s ، p_s والاختزال

نحصل على التكامل الأولي الثالث والذي هو : (3)

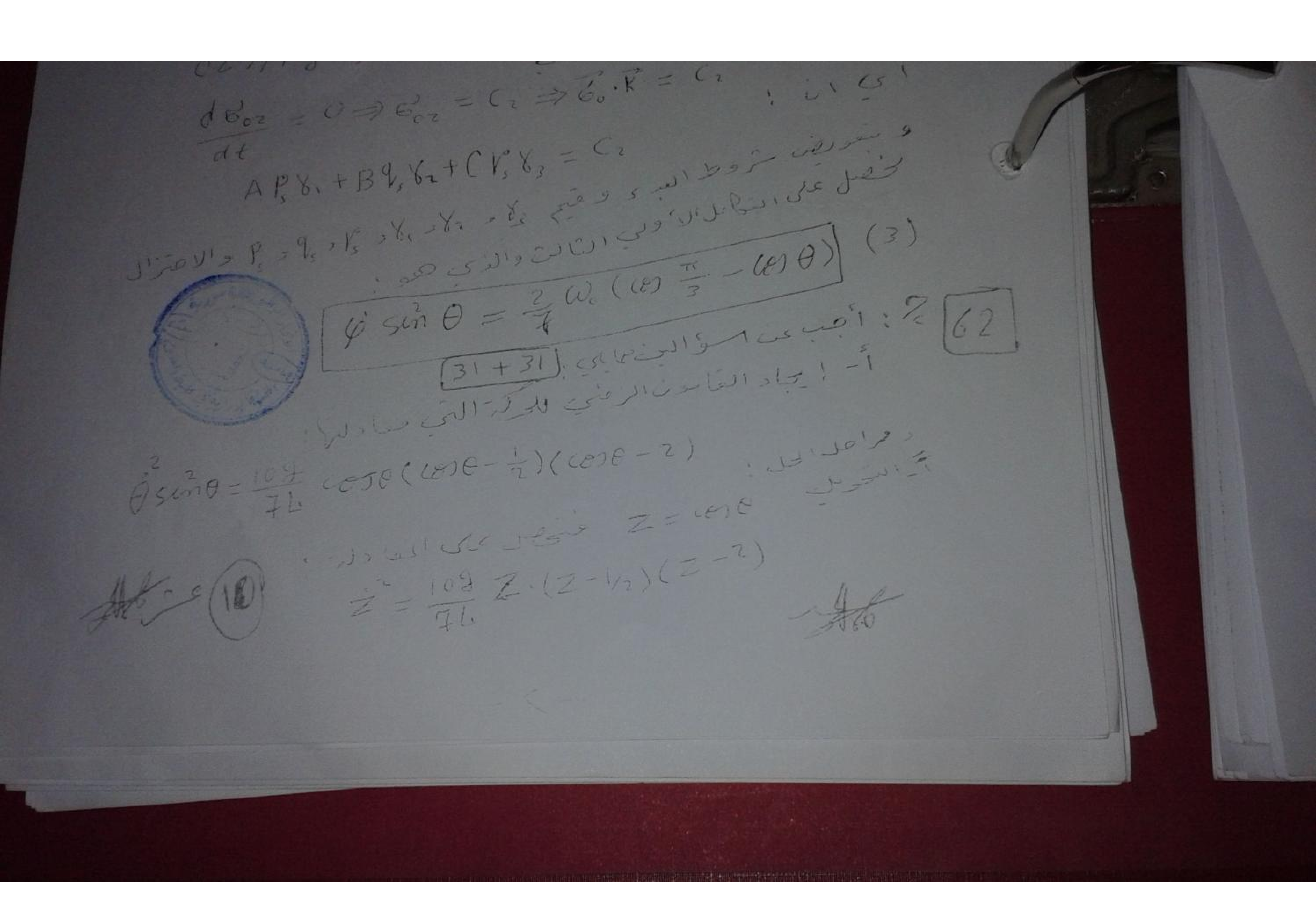
$$\dot\varphi \sin^2\theta = \frac{2}{7}\omega_0\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta\right)$$

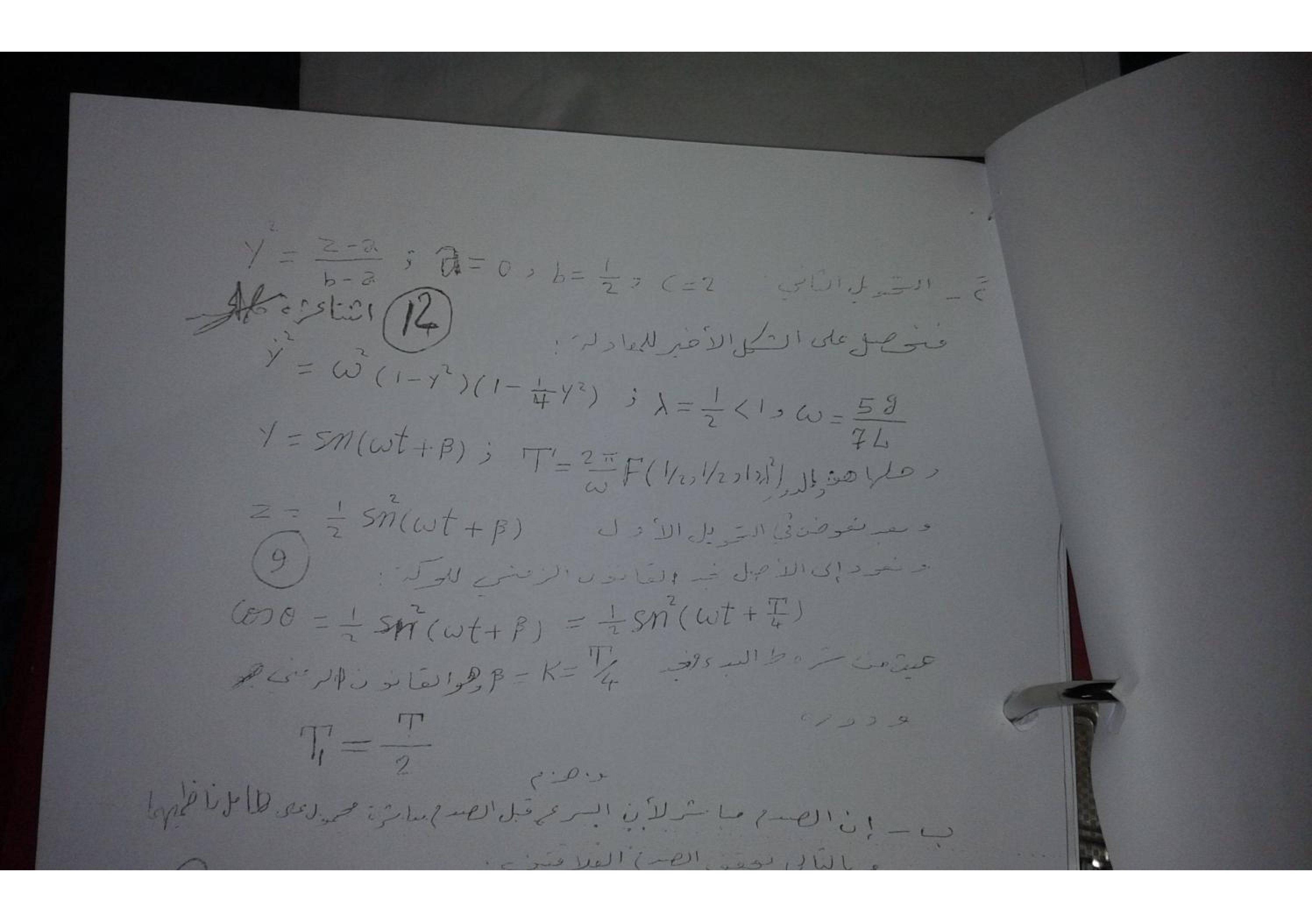
ج2 : أجب عن السؤالين التاليين : 31 + 31 | 62

أ- إيجاد القانون الزمني للحركة التي معادلتها

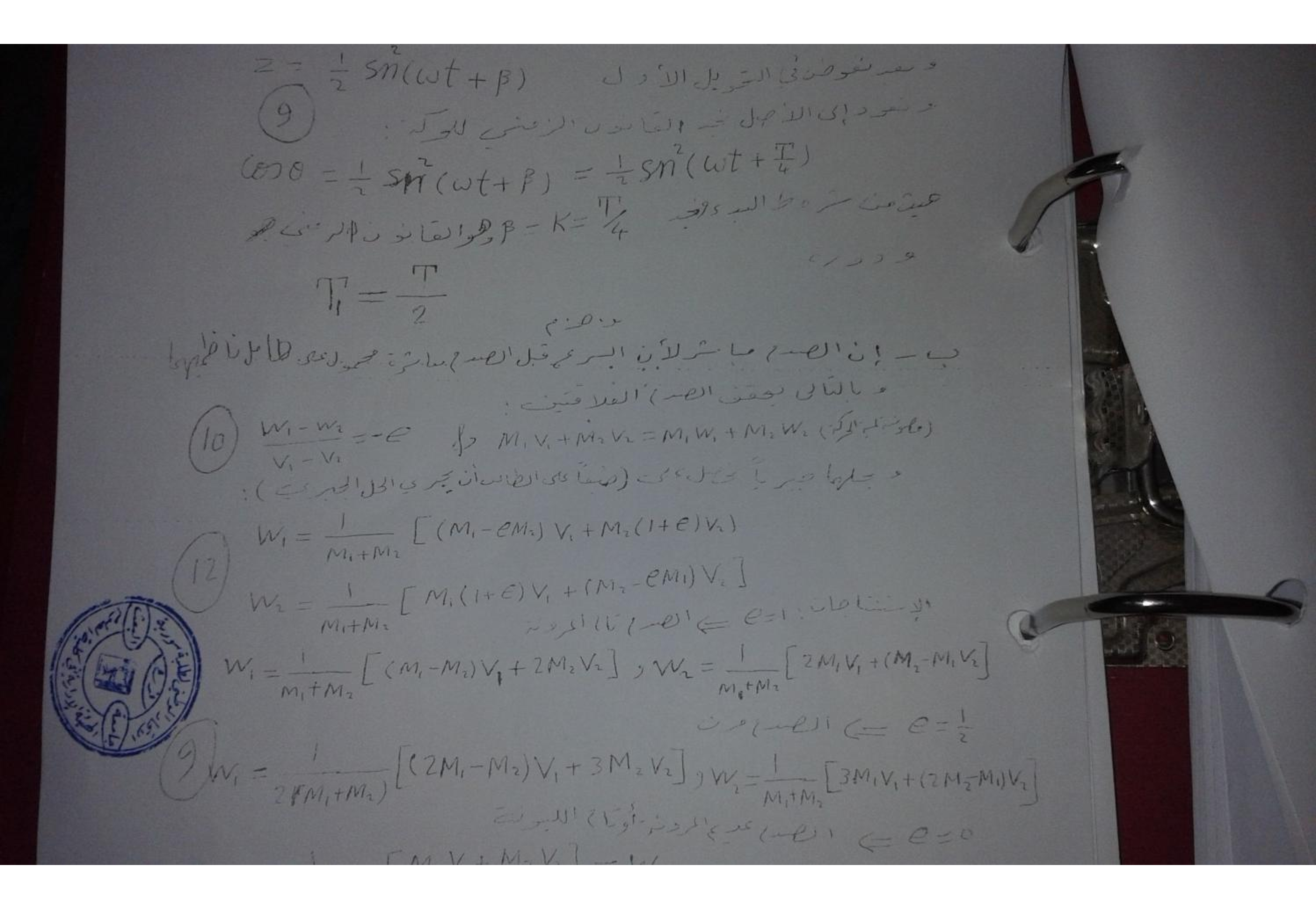
$\dot\theta^2 \sin^2\theta - \frac{10g}{...} \cos\theta(\cos\theta - \frac{1}{2})(\cos\theta - 2)$

ومراحل الحل :


أي أن :
$\frac{dG_{oz}}{dt} = 0 \Rightarrow G_{oz} = C_2 \Rightarrow \vec{G_o}\cdot\vec{k} = C_2$
$A p_s \gamma_1 + B q_s \gamma_2 + C r_s \gamma_3 = C_2$
وبتعويض شروط البدء وقيم $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ و $p_s = q_s = r_s$ والاختزال
نحصل على التكامل الأولي الثالث والذي هو :
$\dot{\varphi}\sin^2\theta = \frac{2}{7}\omega_0 (\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta)$ (3)
62
ج : أجب عن السؤالين التاليين : 31 + 31
أ- إيجاد القانون الزمني للحركة التي مادلة :
$\dot{\theta}^2\sin^2\theta = \frac{109}{76}\cos\theta(\cos\theta - \frac{1}{2})(\cos\theta - 2)$
وإكمال الحل :
بالتحويل $Z = \cos\theta$ فنحصل على المعادلة :
$\dot{Z}^2 = \frac{109}{76} Z\cdot(Z - 1/2)(Z - 2)$
عشر 10
60



ج _ التحويل الثاني $y^2 = \frac{z-a}{b-a}$; $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$
(12)
فنحصل على الشكل الأخير للمعادلة :
$\dot{y}^2 = \omega^2 (1 - y^2)(1 - \frac{1}{4} y^2)$; $\lambda = \frac{1}{2} < 1$, $\omega = \frac{5g}{7L}$
وحلها هو $y = sn(\omega t + \beta)$; والدور $T' = \frac{2\pi}{\omega} F(1/2, 1/2, 1, \lambda^2)$
وبعد نعوض في التحويل الأول $z = \frac{1}{2} sn^2(\omega t + \beta)$
(9)
ونعود إلى الأصل فنجد القانون الزمني للحركة :
$\cos\theta = \frac{1}{2} sn^2(\omega t + \beta) = \frac{1}{2} sn^2(\omega t + \frac{T}{4})$
حيث من شروط البدء نجد $\beta = K = \frac{T}{4}$ وهو القانون الزمني
$T_1 = \frac{T}{2}$
ب _ إن الصدم ما شرلأن البرغي قبل الصدم مباشرة محمول على ... [illegible]
وبالتالي يحقق الصدم القانون :



وبعد نعوض في التحويل الأول $z = \frac{1}{2}\sin^2(\omega t + \beta)$

(9) ونعود إلى الأصل نجد القانون الزمني للحركة:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\sin^2(\omega t + \beta) = \frac{1}{2}\sin^2(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

حيث من شروط البدء نجد $\beta - K = \frac{\pi}{4}$ وهو القانون الزمني ...

$$T_1 = \frac{T}{2}$$

ب – إن الصدم مباشر لأن السرعة قبل الصدم مباشرة محمولة على الخط الواصل بين مركزيهما وبالتالي يحقق الصدم العلاقتين:

(10) $\frac{W_1 - W_2}{V_1 - V_2} = -e$ و $M_1V_1 + M_2V_2 = M_1W_1 + M_2W_2$ (مصونية كمية الحركة)

وبحلهما جبرياً نحصل على (ونترك للطالب أن يجري الحل الجبري):

(12)

$$W_1 = \frac{1}{M_1 + M_2}\left[(M_1 - eM_2)V_1 + M_2(1+e)V_2\right]$$

$$W_2 = \frac{1}{M_1 + M_2}\left[M_1(1+e)V_1 + (M_2 - eM_1)V_2\right]$$

الاستنتاجات: $e = 1 \Leftarrow$ الصدم تام المرونة

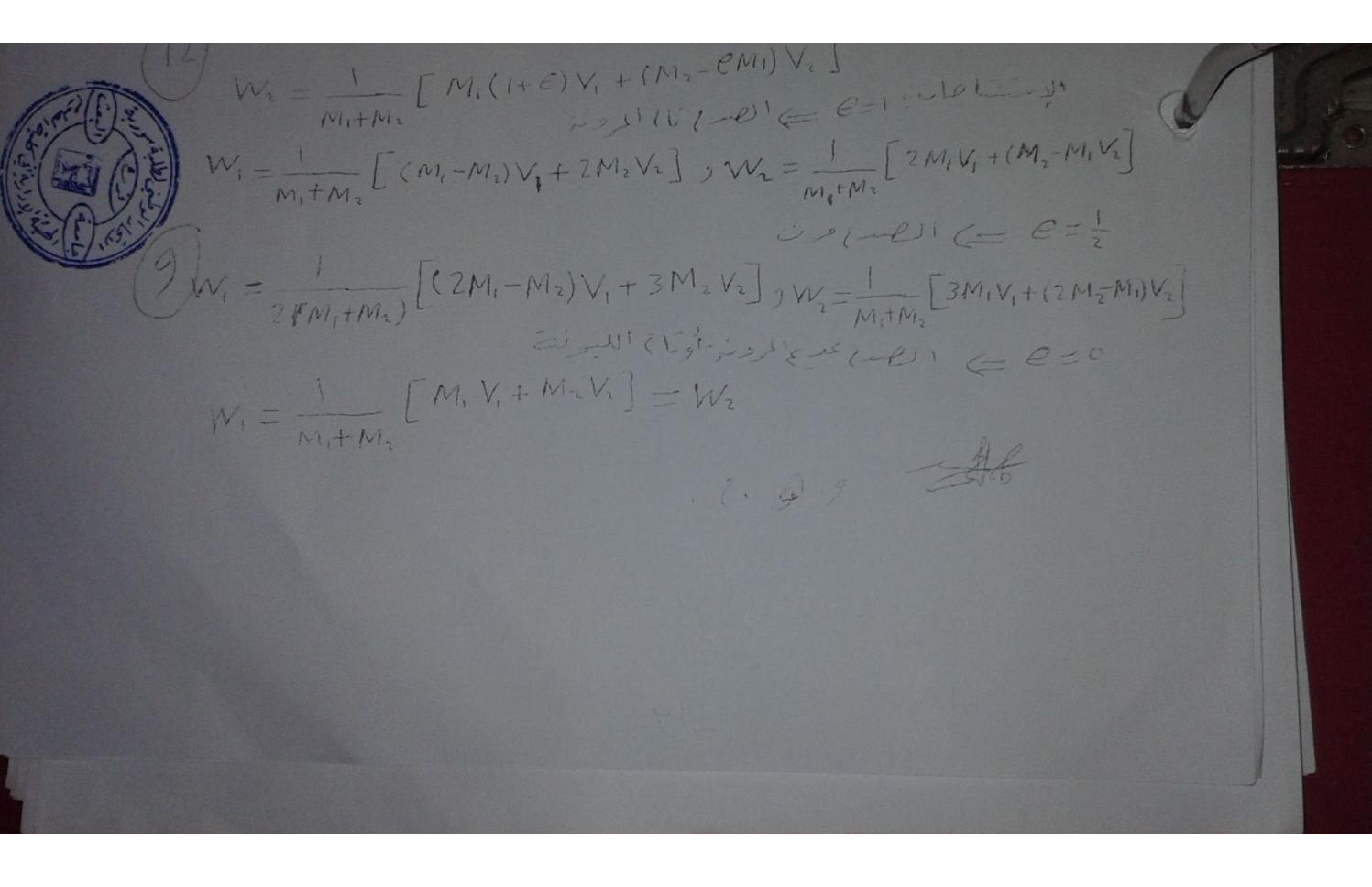
$$W_1 = \frac{1}{M_1 + M_2}\left[(M_1 - M_2)V_1 + 2M_2V_2\right], \quad W_2 = \frac{1}{M_1 + M_2}\left[2M_1V_1 + (M_2 - M_1)V_2\right]$$

$e = \frac{1}{2} \Leftarrow$ الصدم مرن

(9)

$$W_1 = \frac{1}{2(M_1 + M_2)}\left[(2M_1 - M_2)V_1 + 3M_2V_2\right], \quad W_2 = \frac{1}{M_1 + M_2}\left[3M_1V_1 + (2M_2 - M_1)V_2\right]$$

$e = 0 \Leftarrow$ الصدم عديم المرونة أو تام اللدونة



12

$$W_2 = \frac{1}{M_1+M_2}\left[M_1(1+e)V_1 + (M_2 - eM_1)V_2 \right]$$

الاستنتاجات:

$e=1$ ⇐ التصادم تام المرونة

$$W_1 = \frac{1}{M_1+M_2}\left[(M_1-M_2)V_1 + 2M_2V_2 \right] , \quad W_2 = \frac{1}{M_1+M_2}\left[2M_1V_1 + (M_2-M_1V_2 \right]$$

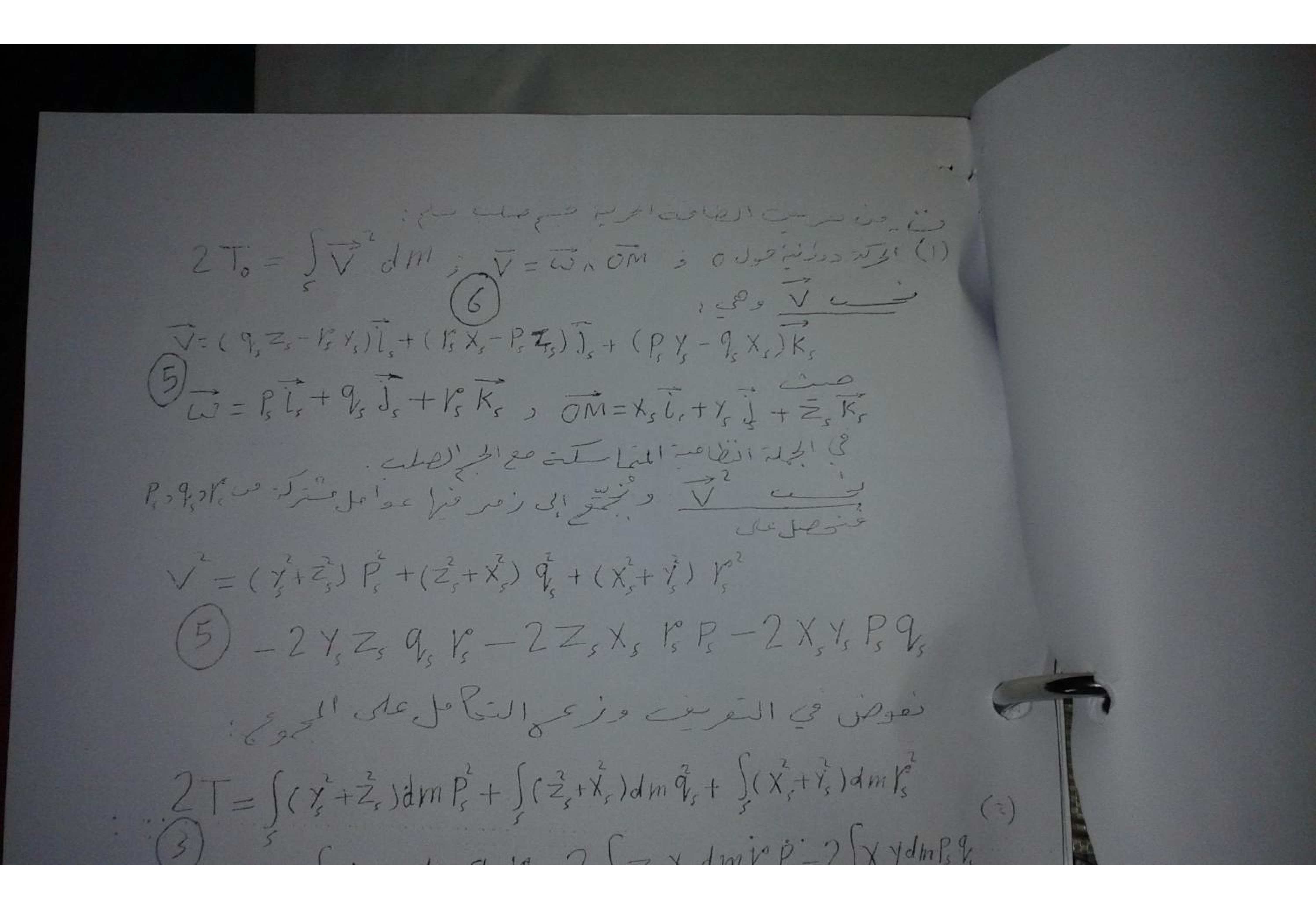
$e=\frac{1}{2}$ ⇐ التصادم مرن

9

$$W_1 = \frac{1}{2(M_1+M_2)}\left[(2M_1-M_2)V_1 + 3M_2V_2 \right] , \quad W_2 = \frac{1}{M_1+M_2}\left[3M_1V_1 + (2M_2-M_1)V_2 \right]$$

$e=0$ ⇐ التصادم عديم المرونة، أو تام اللدونة

$$W_1 = \frac{1}{M_1+M_2}\left[M_1V_1 + M_2V_1 \right] = W_2$$



ن: من تعريف الطاقة الحركية لجسم صلب نجد:

(1) الحركة دورانية حول O ، $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$ ؛ $2T_0 = \int_S \vec{V}^2 \, dm$

(6)

نحسب $\vec{V}$ وهي:

$\vec{V} = (q_s z_s - r_s y_s)\vec{i}_s + (r_s x_s - p_s z_s)\vec{j}_s + (p_s y_s - q_s x_s)\vec{k}_s$

(5) حيث

$\vec{\omega} = p_s \vec{i}_s + q_s \vec{j}_s + r_s \vec{k}_s$ ، $\vec{OM} = x_s \vec{i}_s + y_s \vec{j}_s + z_s \vec{k}_s$

في الجملة الإحداثية المتماسكة مع الجسم الصلب.

نحسب $\vec{V}^2$ ونجمع إلى زمر فيها عوامل مشتركة من r_s, q_s, p_s فنحصل على

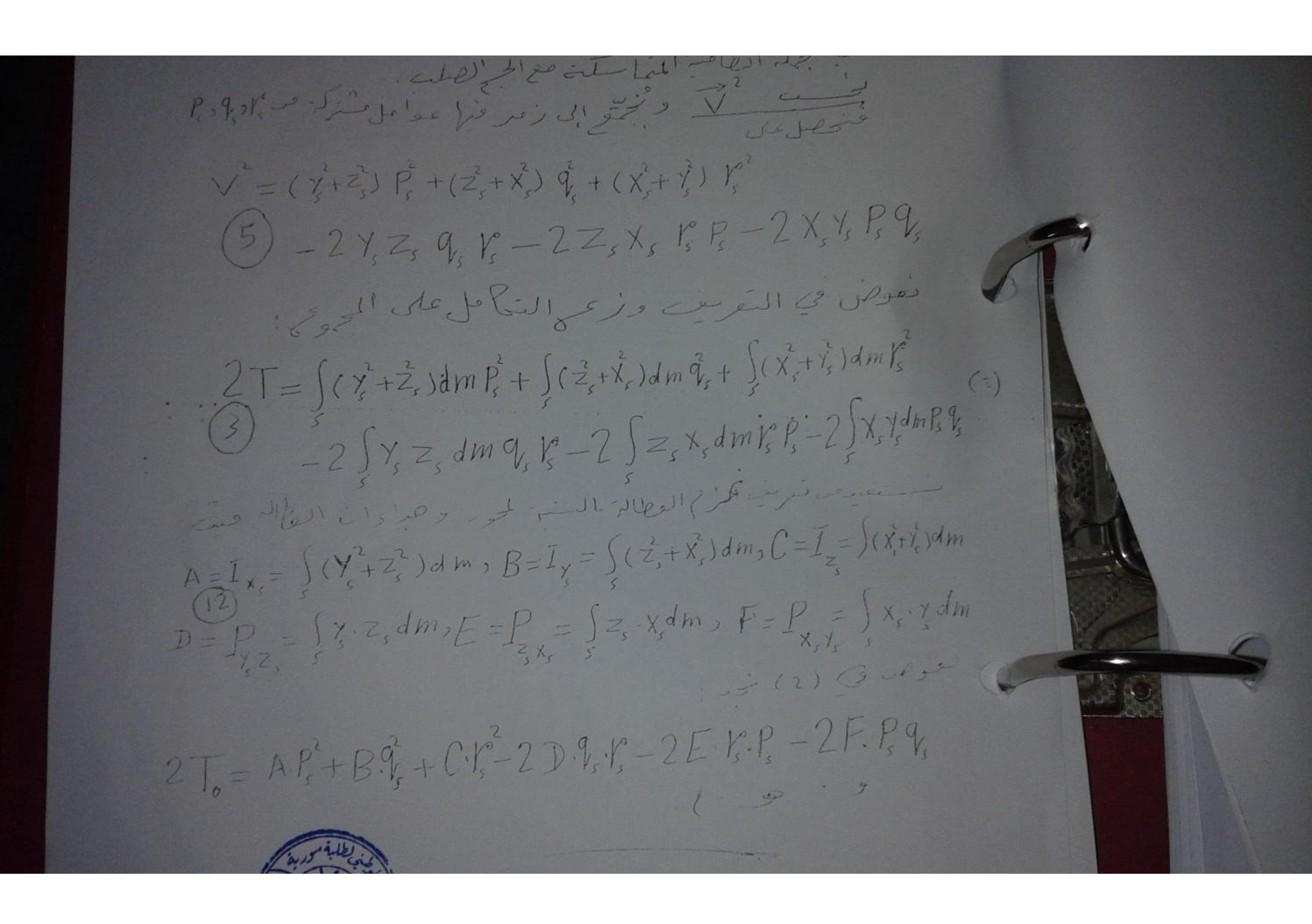
$V^2 = (y_s^2 + z_s^2) p_s^2 + (z_s^2 + x_s^2) q_s^2 + (x_s^2 + y_s^2) r_s^2$

(5) $- 2 y_s z_s q_s r_s - 2 z_s x_s r_s p_s - 2 x_s y_s p_s q_s$

نعوض في التعريف ونوزع التكامل على الحدود:

$2T = \int_S (y_s^2 + z_s^2)\, dm\, p_s^2 + \int_S (z_s^2 + x_s^2)\, dm\, q_s^2 + \int_S (x_s^2 + y_s^2)\, dm\, r_s^2$ (2)

(3) ... $- 2\int z_s x_s \, dm\, r_s p_s - 2\int x_s y_s \, dm\, p_s q_s$



... جملة الإحداثيات المتماسكة مع الجسم الصلب.

نحسب $\vec{V}^2$ ونجمع إلى زمر فيها عوامل مشتركة من r_s, q_s, P_s فنحصل على

$$V^2 = (Y_s^2 + Z_s^2)\,P_s^2 + (Z_s^2 + X_s^2)\,q_s^2 + (X_s^2 + Y_s^2)\,r_s^2$$

(5) $$-2Y_sZ_s\,q_s r_s - 2Z_sX_s\,r_s P_s - 2X_sY_s\,P_s q_s$$

نعوض في التعريف ونوزع التكامل على الحدود:

$$2T = \int_s (Y_s^2 + Z_s^2)\,dm\,P_s^2 + \int_s (Z_s^2 + X_s^2)\,dm\,q_s^2 + \int_s (X_s^2 + Y_s^2)\,dm\,r_s^2 \quad (2)$$

(3) $$-2\int_s Y_sZ_s\,dm\,q_s r_s - 2\int_s Z_sX_s\,dm\,r_s P_s - 2\int_s X_sY_s\,dm\,P_s q_s$$

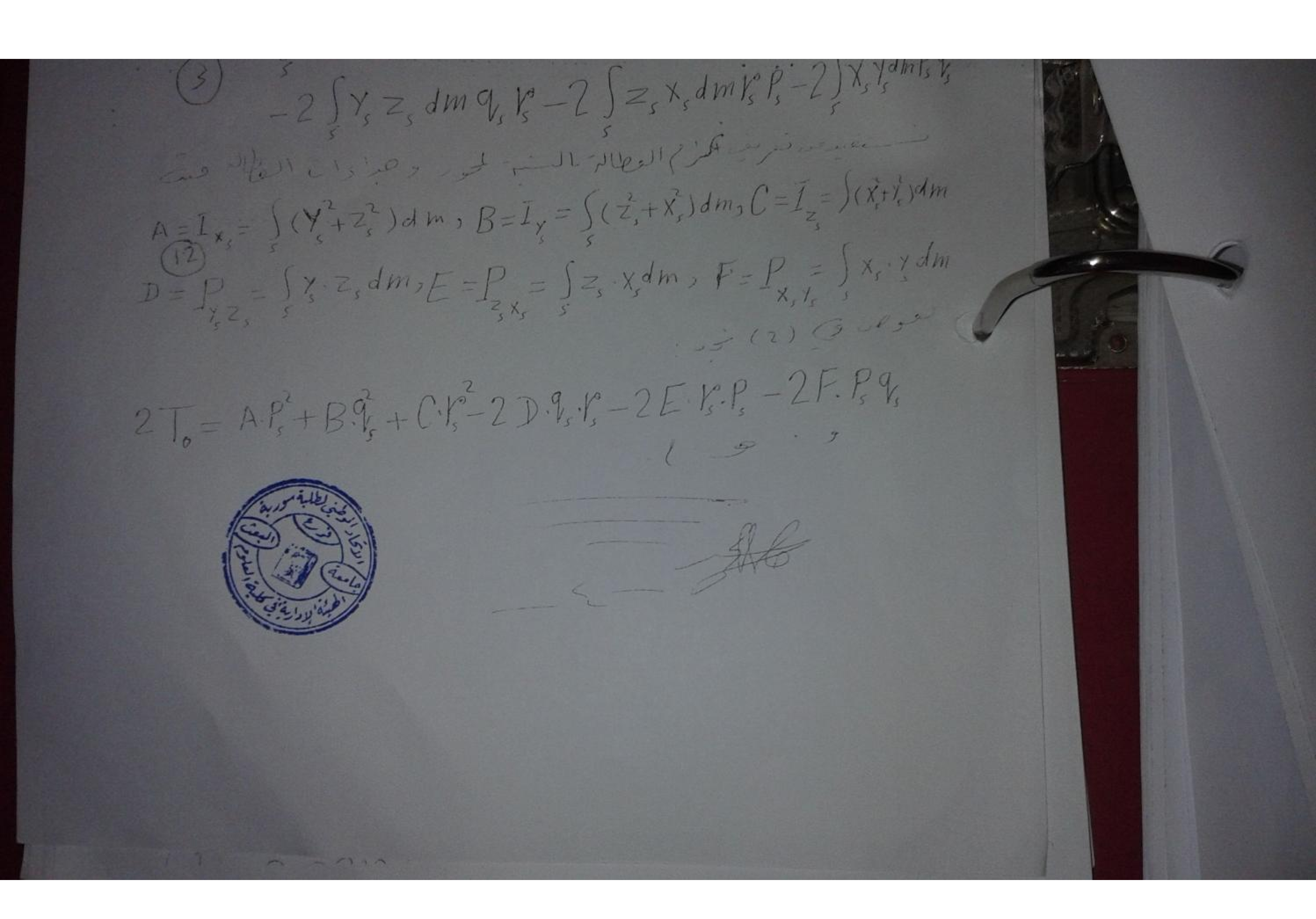
حسب تعريف عزوم العطالة بالنسبة للمحاور وجداءات العطالة فإن

$$A = I_{x_s} = \int_s (Y_s^2 + Z_s^2)\,dm \,,\; B = I_{y_s} = \int_s (Z_s^2 + X_s^2)\,dm \,,\; C = I_{z_s} = \int (X_s^2 + Y_s^2)\,dm$$

(12) $$D = P_{y_sz_s} = \int_s Y_s \cdot Z_s\,dm \,,\; E = P_{z_sx_s} = \int_s Z_s \cdot X_s\,dm \,,\; F = P_{x_sy_s} = \int_s X_s \cdot Y_s\,dm$$

نعوض في (2) نجد

$$2T_o = A P_s^2 + B q_s^2 + C r_s^2 - 2D\,q_s r_s - 2E\,r_s P_s - 2F\,P_s q_s$$



(3)

$$-2\int_s Y_s Z_s \, dm \, q_s r_s - 2\int_s Z_s X_s \, dm \, r_s p_s - 2\int_s X_s Y_s \, dm \, p_s q_s$$

نسمي عزوم العطالة بالنسبة للمحور وجداءات العطالة فيه

$$A = I_{x_s} = \int_s (Y_s^2 + Z_s^2)\, dm, \quad B = I_{y_s} = \int_s (Z_s^2 + X_s^2)\, dm, \quad C = I_{z_s} = \int_s (X_s^2 + Y_s^2)\, dm$$

(12)

$$D = P_{y_s z_s} = \int_s Y_s \cdot Z_s \, dm, \quad E = P_{z_s x_s} = \int_s Z_s \cdot X_s \, dm, \quad F = P_{x_s y_s} = \int_s X_s \cdot Y_s \, dm$$

نعوض في (2) نجد:

$$2T_0 = A \cdot p_s^2 + B \cdot q_s^2 + C \cdot r_s^2 - 2D \cdot q_s \cdot r_s - 2E \cdot r_s \cdot p_s - 2F \cdot p_s q_s$$

جامعة البعث — امتحان مقرر الميكانيك ٣ — اسم الطالب: دعاء عمارة

كليــة العلوم — السنة الثالثة رياضيات — العلامة: 100 (مائة درجة)

قسم الرياضيات — المدة: ساعة ونصف

الدورة التكميلية 2014 - 2013

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول : (40):

إذا تحرك جسمٍ صلبٌ حول نقطةٍ ثابتةٍ منه في الفضاء الثلاثي الأبعاد، وكانت مساقط عزم القوى المؤثرة عليه على محاور الجملة المتماسكة مع الجسم OZ_1, OY_1, OX_1 هي L, M, N ، بالترتيب، فالمطلوب مايلي:

1. أرسم الشكل المناسب وسمِّ الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع الجسم مع التعليل.
2. أوجد المعادلات التفاضلية لحركة الجسم وذلك بدلالة مساقط متجه دورانه على المحاور المتماسكة معه ومشتقاتها.
3. إذا كانت المحاور المتماسكة مع الجسم أساسية للعطالة فاستنتج من نتيجة الطلب الثاني المعادلات التفاضلية المناسبة لحركة الجسم وتنسجم مع هذا الشرط الإضافي. ماذا تُسمى هذه المعادلات الجديدة؟

السؤال الثاني : (30):

تصادمت كرتان صغيرتان m_1, m_2 تصادماً مائلاً (غير مباشر) وبدون احتكاك وكانت سرعتاهما قبل التصادم مباشرة $\vec{V}_1, \vec{V}_2$. المطلوب:

1. ارسم حالة الكرتين قبل التصادم مباشرةً ثم بعد التصادم مباشرةً.
2. أوجد سرعتا الكرتين بعد التصادم مباشرةً.

السؤال الثالث : (30):

تتحرك المجموعة المادية S في المستوي الشاقولي $OXYZ$ ، علماً أنها تتكون من القضيبين المتماثلين OA ، AB المتمفصلين في A و O مفصل ثابت للقضيب الأول OA وطول كلٍ من القضيبين L وكتلته m . المطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب وسمِّ الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المجموعة مع التعليل.
2. أجب <u>عن طلبين فقط</u> ممايلي:

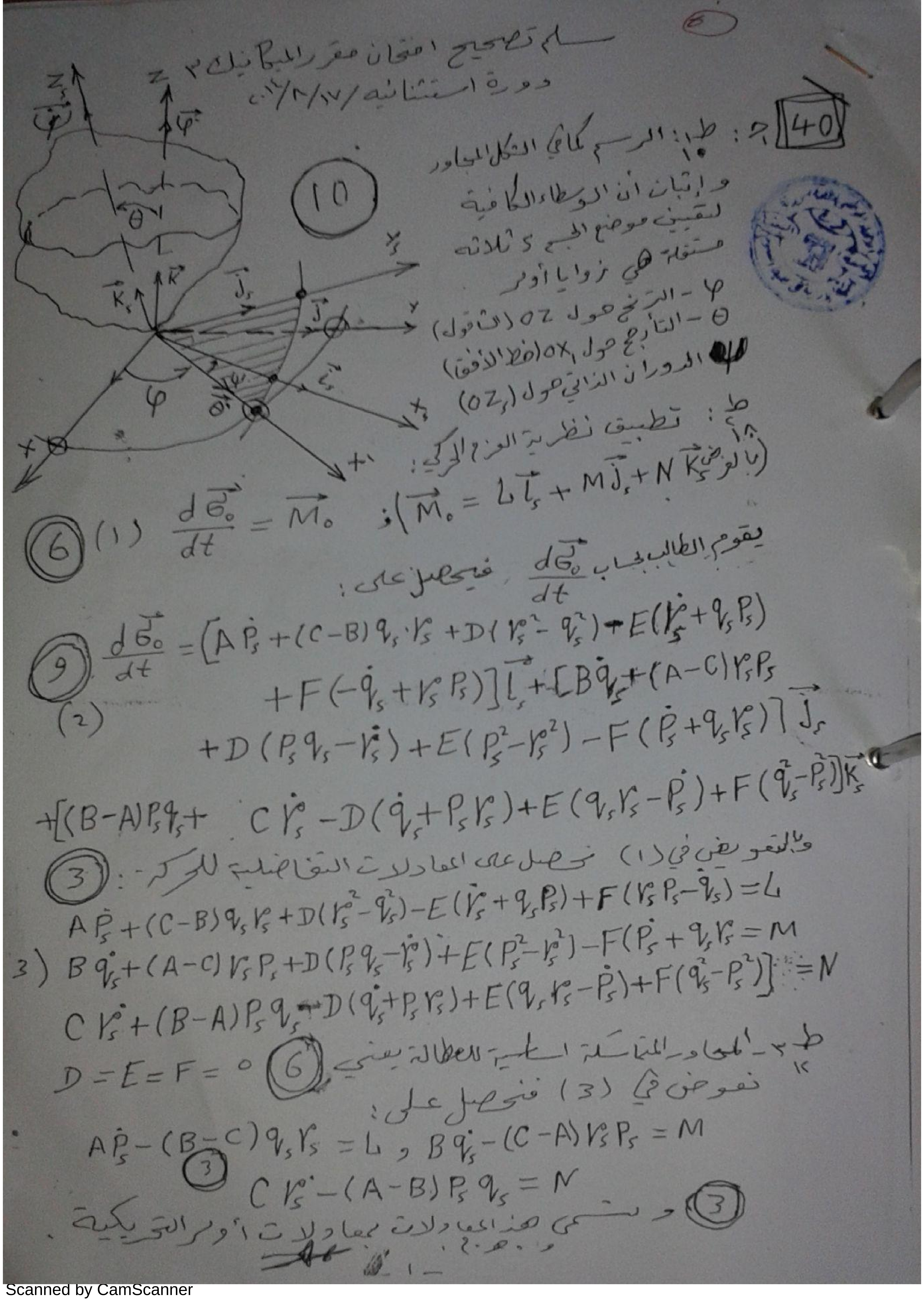
أ. أوجد كمية الحركة لهذه المجموعة.

ب. أوجد العزم الحركي لهذه المجموعة.

ت. أوجد الطاقة الحركية لهذه المجموعة.

——— تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ——— مدرس المقرر: د.كامل محمد ———

حمص 17 / 8 / 2014



(6)

سلم تصحيح امتحان مقرر الميكانيك ٣
دورة استثنائية ٢٠١٤/٢/٢٧

ج ١ : (40)

ط١: الرسم كما في الشكل المجاور وإثبات أن الوسطاء الكافية لتعيين موضع الجسم S ثلاثة مستقلة هي زوايا أولر

φ - الترنح حول OZ (الشاقول)

θ - التأرجح حول OX_1 (خط الأفق)

ψ الدوران الذاتي حول (OZ_s)

(10)

ط٢: تطبيق نظرية العزم الحركي:

أ) بالعرض $(\vec{M}_0 = L\vec{i}_s + M\vec{j}_s + N\vec{K}_s)$ ؛

(6) (1) $$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{M}_0$$

يقوم الطالب بحساب $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}$ فيحصل على:

(9) (2)
$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = [A\dot{p}_s + (C-B)q_s r_s + D(r_s^2 - q_s^2) - E(\dot{r}_s + q_s p_s) + F(-\dot{q}_s + r_s p_s)]\vec{i}_s + [B\dot{q}_s + (A-C)r_s p_s + D(p_s q_s - \dot{r}_s) + E(p_s^2 - r_s^2) - F(\dot{p}_s + q_s r_s)]\vec{j}_s + [(B-A)p_s q_s + C\dot{r}_s - D(\dot{q}_s + p_s r_s) + E(q_s r_s - \dot{p}_s) + F(q_s^2 - p_s^2)]\vec{K}_s$$

وبالتعويض في (1) نحصل على المعادلات التفاضلية للحركة: (3)

$$A\dot{p}_s + (C-B)q_s r_s + D(r_s^2 - q_s^2) - E(\dot{r}_s + q_s p_s) + F(r_s p_s - \dot{q}_s) = L$$
$$(3)\quad B\dot{q}_s + (A-C)r_s p_s + D(p_s q_s - \dot{r}_s) + E(p_s^2 - r_s^2) - F(\dot{p}_s + q_s r_s) = M$$
$$C\dot{r}_s + (B-A)p_s q_s - D(\dot{q}_s + p_s r_s) + E(q_s r_s - \dot{p}_s) + F(q_s^2 - p_s^2) = N$$

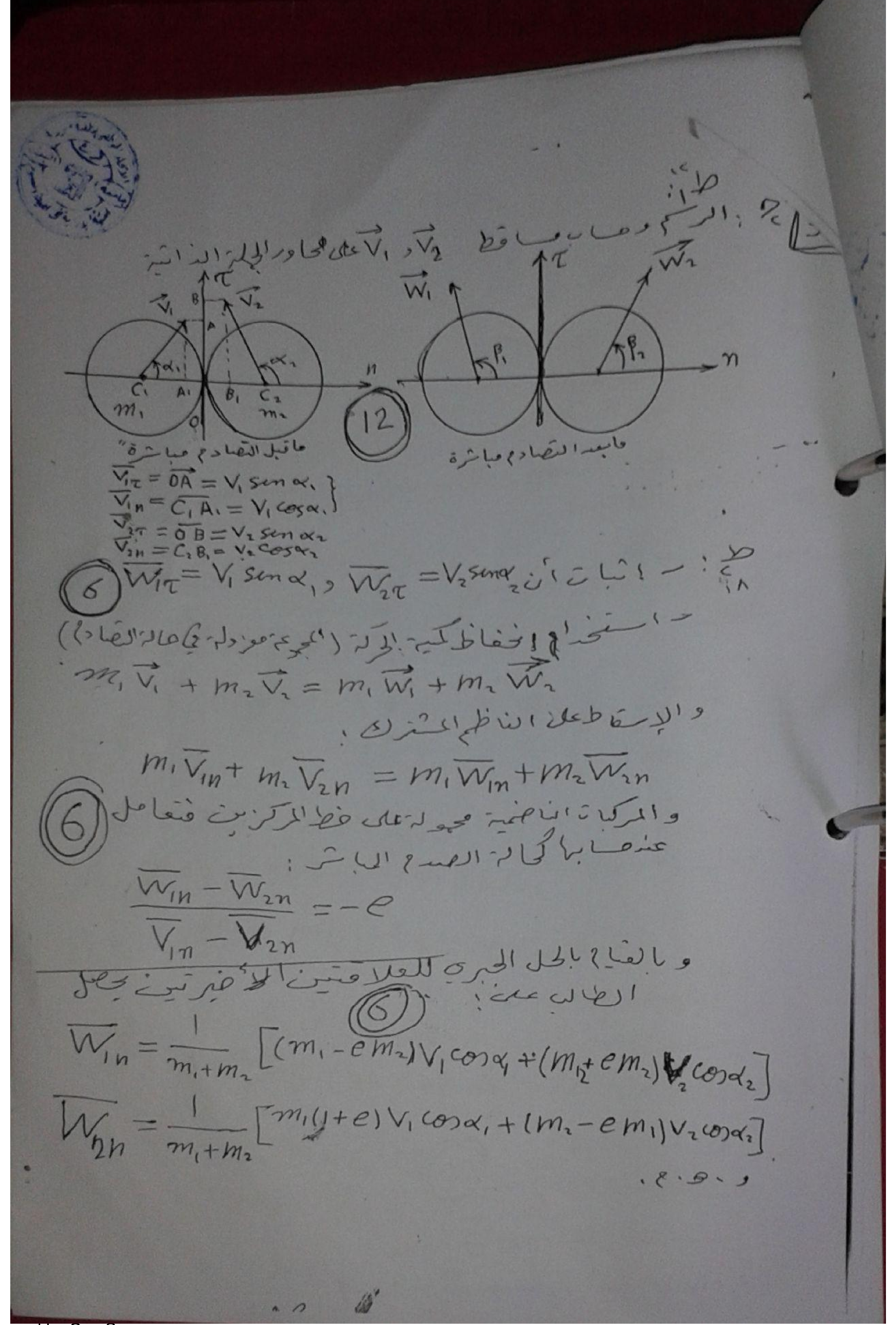
ط٣- المحاور المتناظرة الساطحية للعطالة يعني $D = E = F = 0$ (6) نعوض في (3) فنحصل على:

$$A\dot{p}_s - (B-C)q_s r_s = L \,,\quad B\dot{q}_s - (C-A)r_s p_s = M$$ (3)

$$C\dot{r}_s - (A-B)p_s q_s = N$$ (3)

وتسمى هذه المعادلات بمعادلات أولر التحريكية.

Scanned by CamScanner



ط١: الرسم وحساب مساقط $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ على المحاور الجملة الذاتية

$$\overline{V_{1\tau}} = \overline{OA} = V_1 \sin\alpha_1$$
$$\overline{V_{1n}} = \overline{C_1A_1} = V_1 \cos\alpha_1$$
$$\overline{V_{2\tau}} = \overline{OB} = V_2 \sin\alpha_2$$
$$\overline{V_{2n}} = \overline{C_2B_1} = V_2 \cos\alpha_2$$

ط٢: - إثبات أن $\overline{W_{1\tau}} = V_1 \sin\alpha_1$ و $\overline{W_{2\tau}} = V_2 \sin\alpha_2$ (6)

- استخدام انحفاظ كمية الحركة (الجملة معزولة في حالة التصادم)

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{W}_1 + m_2\vec{W}_2$$

والإسقاط على الناظم المشترك:

$$m_1\overline{V_{1n}} + m_2\overline{V_{2n}} = m_1\overline{W_{1n}} + m_2\overline{W_{2n}}$$

(6) والمركبات الناظمية محمولة على خط المركزين فتعامل عندها بالحالة الصدم المباشر:

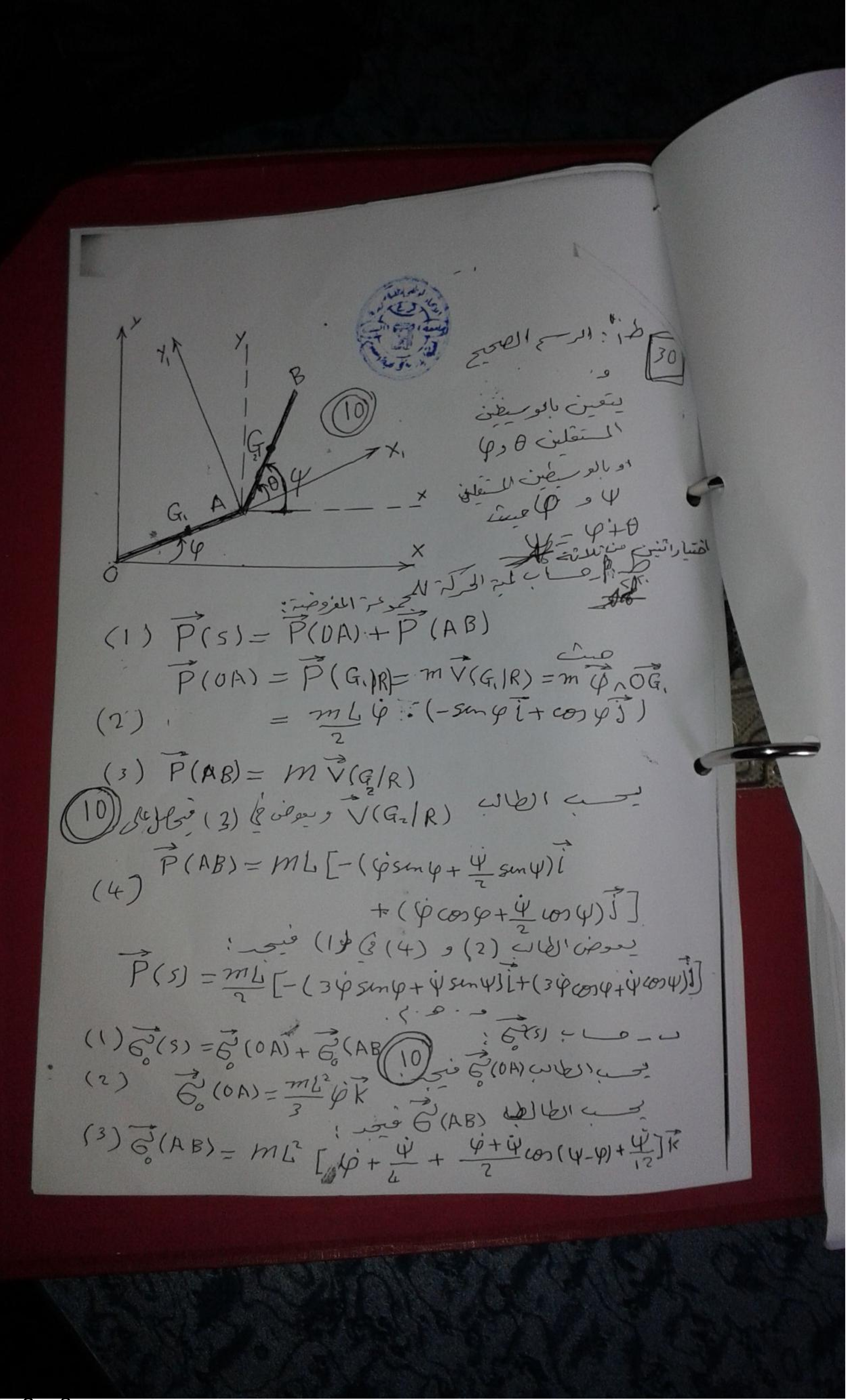
$$\frac{\overline{W_{1n}} - \overline{W_{2n}}}{\overline{V_{1n}} - \overline{V_{2n}}} = -e$$

وبالقيام بالحل الجبري للعلاقتين الأخيرتين يحصل الطالب على: (6)

$$\overline{W_{1n}} = \frac{1}{m_1+m_2}\left[(m_1 - e m_2)V_1\cos\alpha_1 + (m_2 + e m_2)V_2\cos\alpha_2\right]$$

$$\overline{W_{2n}} = \frac{1}{m_1+m_2}\left[m_1(1+e)V_1\cos\alpha_1 + (m_2 - e m_1)V_2\cos\alpha_2\right]$$

و.هـ.م.



ط1: الرسم الصحيح 30

و

يتعين بالوسيطين المستقلين θ و φ

او بالوسيطين المستقلين ψ و φ حيث

$\psi = \varphi + \theta$

اختيار اثنين من ثلاثة

ط2: حساب كمية الحركة للجملة المفروضة:

(1) $\vec{P}(S) = \vec{P}(OA) + \vec{P}(AB)$

حيث

$\vec{P}(OA) = \vec{P}(G_1|R) = m\vec{V}(G_1|R) = m\,\dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{OG_1}$

(2) $= \frac{mL}{2}\dot{\varphi}\,(-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j})$

(3) $\vec{P}(AB) = m\vec{V}(G_2/R)$

يحسب الطالب $\vec{V}(G_2/R)$ ويعوض في (3) فيحصل على (10)

(4) $\vec{P}(AB) = mL\left[-(\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{\dot{\psi}}{2}\sin\psi)\vec{i} + (\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{\dot{\psi}}{2}\cos\psi)\vec{j}\right]$

يعوض الطالب (2) و (4) في (1) فيجد:

$\vec{P}(S) = \frac{mL}{2}\left[-(3\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\psi)\vec{i} + (3\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\psi)\vec{j}\right]$

ب- حساب $\vec{\sigma}_0(S)$:

(1) $\vec{\sigma}_0(S) = \vec{\sigma}_0(OA) + \vec{\sigma}_0(AB)$ (10)

يحسب الطالب $\vec{\sigma}_0(OA)$ فيجد

(2) $\vec{\sigma}_0(OA) = \frac{mL^2}{3}\dot{\varphi}\,\vec{k}$

يحسب الطالب $\vec{\sigma}(AB)$ فيجد:

(3) $\vec{\sigma}_0(AB) = mL^2\left[\dot{\varphi} + \frac{\dot{\psi}}{4} + \frac{\dot{\varphi}+\dot{\psi}}{2}\cos(\psi-\varphi) + \frac{\dot{\psi}}{12}\right]\vec{k}$

يعوض الطالب (2) و (3) في (1) فيجد :

$$\vec{\sigma}_O(S) = mL^2\left[\frac{4\dot{\varphi}+\dot{\psi}}{3}+\frac{\dot{\varphi}+\dot{\psi}}{2}\cos(\psi-\varphi)\right]\vec{k}$$

و . هـ . ع .

ج- حساب $T_O(S)$:

$$(1)\quad T_O(S) = T_O(OA) + T_O(AB)$$

(10)

يحسب الطالب $T_O(OA)$ فيجد :

$$(2)\quad T_O(OA) = \frac{mL^2}{6}\dot{\varphi}^2$$

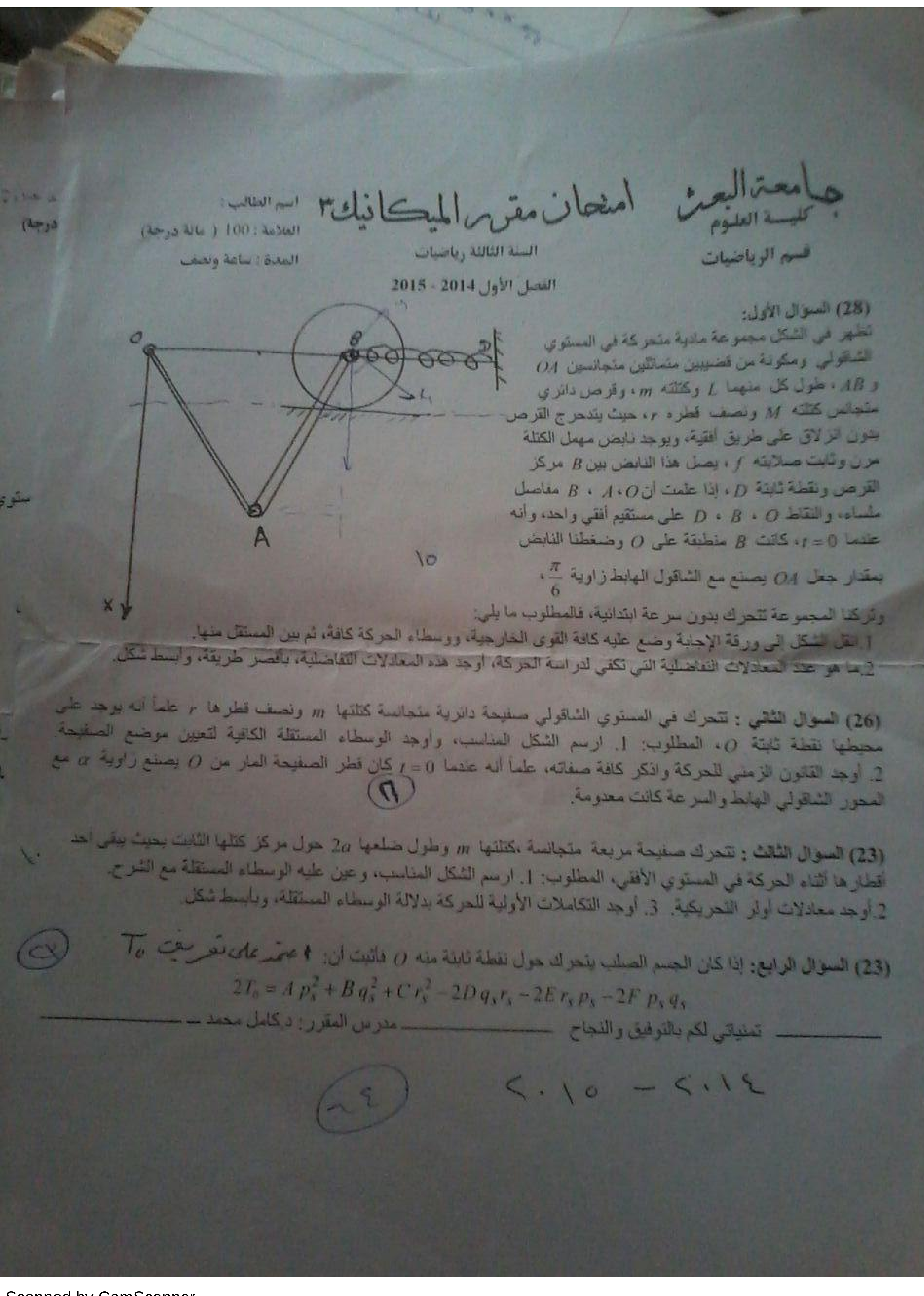
يحسب الطالب $T_O(AB)$ فيجد :

$$(3)\quad T_O(AB) = \frac{mL^2}{2}\left[\dot{\varphi}^2+\frac{\dot{\psi}^2}{3}+\dot{\varphi}\cdot\dot{\psi}\cos(\psi-\varphi)\right]$$

يعوض الطالب (2) و (3) في (1) فيجد :

$$T_O(S) = \frac{mL^2}{2}\left[\frac{4\dot{\varphi}^2}{3}+\frac{\dot{\psi}^2}{3}+\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi)\right]$$

و . هـ . ع .



جامعة البعث

كليـــة العلوم

قسم الرياضيات

امتحان مقرر الميكانيك ٣

السنة الثالثة رياضيات

اسم الطالب :

العلامة : 100 (مائة درجة)

المدة : ساعة ونصف

الفصل الأول 2014 - 2015

(28) السؤال الأول:

تظهر في الشكل مجموعة مادية متحركة في المستوي الشاقولي ومكونة من قضيبين متماثلين متجانسين OA و AB، طول كل منهما L وكتلته m، وقرص دائري متجانس كتلته M ونصف قطره r، حيث يتدحرج القرص بدون انزلاق على طريق أفقية، ويوجد نابض مهمل الكتلة مرن وثابت صلابته f، يصل هذا النابض بين B مركز القرص ونقطة ثابتة D، إذا علمت أن O، A، B مفاصل ملساء، والنقاط O، B، D على مستقيم أفقي واحد، وأنه عندما $t=0$، كانت B منطبقة على O وضغطنا النابض بمقدار جعل OA يصنع مع الشاقول الهابط زاوية $\frac{\pi}{6}$،

وتركنا المجموعة تتحرك بدون سرعة ابتدائية، فالمطلوب ما يلي:

1. انقل الشكل إلى ورقة الإجابة وضع عليه كافة القوى الخارجية، ووسطاء الحركة كافة، ثم بين المستقل منها.
2. ما هو عدد المعادلات التفاضلية التي تكفي لدراسة الحركة، أوجد هذه المعادلات التفاضلية، بأقصر طريقة، وأبسط شكل.

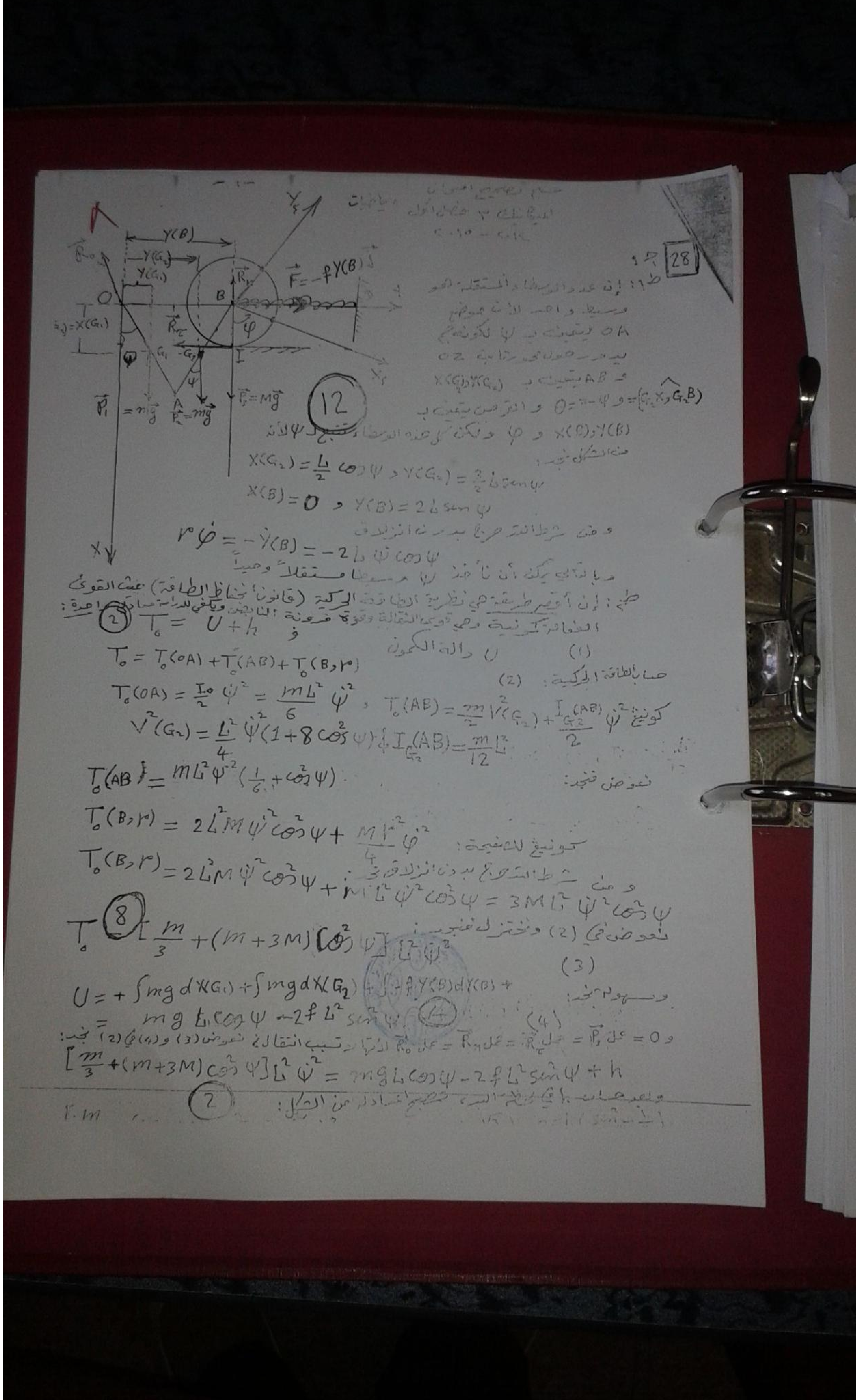
(26) السؤال الثاني : تتحرك في المستوي الشاقولي صفيحة دائرية متجانسة كتلتها m ونصف قطرها r علماً أنه يوجد على محيطها نقطة ثابتة O، المطلوب: 1. ارسم الشكل المناسب، وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع الصفيحة 2. أوجد القانون الزمني للحركة واذكر كافة صفاته، علماً أنه عندما $t=0$ كان قطر الصفيحة المار من O يصنع زاوية α مع المحور الشاقولي الهابط والسرعة كانت معدومة.

(23) السؤال الثالث : تتحرك صفيحة مربعة متجانسة ،كتلتها m وطول ضلعها $2a$ حول مركز كتلها الثابت بحيث يبقى أحد أقطارها أثناء الحركة في المستوي الأفقي، المطلوب: 1. ارسم الشكل المناسب، وعين عليه الوسطاء المستقلة مع الشرح. 2. أوجد معادلات أولر التحريكية. 3. أوجد التكاملات الأولية للحركة بدلالة الوسطاء المستقلة، وبأبسط شكل.

(23) السؤال الرابع: إذا كان الجسم الصلب يتحرك حول نقطة ثابتة منه O فاثبت أن:

$$2T_0 = A\,p_s^2 + B\,q_s^2 + C\,r_s^2 - 2D\,q_s r_s - 2E\,r_s p_s - 2F\,p_s q_s$$

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح —— مدرس المقرر: د.كامل محمد



حسم تصحيح امتحان الرياضيات
الميكانيك ٣ - الفصل الأول
٢٠١٥ - ٢٠١٤

28 ج١:

ط١: إن عدد الوسطاء المستقلة هو وسيط واحد لأن موضع OA يتعين بـ ψ لكونه يدور حول محور ثابت OZ و AB يتعين بـ $X(G_2), Y(G_2)$ و $\theta = \pi - \psi = (\widehat{G_2X, G_2B})$ والقرص يتعين بـ $X(B), Y(B)$ و φ ونكتب هذه الوسطاء بدلالة ψ لأنه من الشكل نجد:

$$X(G_2) = \frac{L}{2}\cos\psi \quad , \quad Y(G_2) = \frac{3}{2}L\sin\psi$$

$$X(B) = 0 \quad , \quad Y(B) = 2L\sin\psi$$

ومن شرط التدحرج بدون انزلاق

$$r\dot{\varphi} = -\dot{Y}(B) = -2L\dot{\psi}\cos\psi$$

وبالتالي يمكن أن نأخذ ψ وسيطاً مستقلاً وحيداً.

ط٢: إن أقصر طريقة هي نظرية الطاقة الحركية (قانون انحفاظ الطاقة) حيث القوى الفاعلة كمونية وهي قوى الثقالة وقوة مرونة النابض ويكفي للدراسة معادلة واحدة:

② $T_0 = U + h$ (1)   U دالة الكمون

حساب الطاقة الحركية: (2)

$$T_0 = T_0(OA) + T_0(AB) + T_0(B, r)$$

$$T_0(OA) = \frac{I_0}{2}\dot{\psi}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2 \quad , \quad T_0(AB) = \frac{m}{2}V^2(G_2) + \frac{I_{G_2}(AB)}{2}\dot{\psi}^2$$ كونيغ

$$V^2(G_2) = \frac{L^2}{4}\dot{\psi}^2(1 + 8\cos^2\psi) \quad , \quad I_{G_2}(AB) = \frac{m}{12}L^2$$

نعوض فنجد:

$$T_0(AB) = mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6} + \cos^2\psi\right)$$

كونيغ للصفيحة:

$$T_0(B, r) = 2L^2M\dot{\psi}^2\cos^2\psi + \frac{Mr^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

ومن شرط التدحرج بدون انزلاق نجد:

$$T_0(B, r) = 2L^2M\dot{\psi}^2\cos^2\psi + ML^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi = 3ML^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi$$

نعوض في (2) ونختزل فنجد:

⑧ $$T_0 = \left[\frac{m}{3} + (m + 3M)\cos^2\psi\right]L^2\dot{\psi}^2 \quad (3)$$

وبسهولة نجد:

$$U = +\int mg\,dX(G_1) + \int mg\,dX(G_2) + \int -fY(B)\,dY(B) +$$

$$= mgL\cos\psi - 2fL^2\sin^2\psi \quad (4)$$ ④

و $\text{عمل } \vec{P_3} = \text{عمل } \vec{R_2} = \text{عمل } \vec{R_1} = \text{عمل } \vec{R_0} = 0$ الأخيرة بسبب انتقالها. نعوض (3) و(4) في (2) نجد:

$$\left[\frac{m}{3} + (m + 3M)\cos^2\psi\right]L^2\dot{\psi}^2 = mgL\cos\psi - 2fL^2\sin^2\psi + h$$

② وبعد حساب h في لحظة البدء تصبح المعادلة من الحل:

[illegible]

ط٢ : معادلات أولر التي تكتب لحركة جسم متناظر حول مركز ثقله هي :

$$A\dot{p}_1 - (B-C)q_1 r_1 = 0 \,,\; B\dot{q}_1 - (C-A)r_1 p_1 = 0 \,,\; C\dot{r}_1 - (A-B)p_1 q_1 = 0$$

نحسب عزوم العطالة الأساسية :

$$A = B = \frac{mc^2}{2} = \frac{C}{2}$$

$$\dot{p}_1 + q_1 r_1 = 0 \,,\; \dot{q}_1 - r_1 p_1 = 0 \,,\; \dot{r}_1 = 0$$

(6)

ط٢ : يوجد للحركة ثلاث تكاملات أولية هي : تكامل الطاقة :

بما أن القوى المؤثرة هي قوة الثقل ولا تسبب انتقالاً لأن مركز الثقل ساكن بالفرض فإن تكامل الطاقة يأخذ الشكل التالي

$$\frac{1}{2}(A p_1^2 + A q_1^2 + 2A r_1^2) = h \qquad ; \quad p = \dot{\theta} \,,\; q = \dot{\varphi}\sin\theta \,,\; r = \dot{\varphi}\cos\theta$$

h ثابت تكامل ، وبالتالي

$$\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\varphi) = h \qquad (1)$$

وبما أن : $\sum m_G = 0$ فإن نظرية العزم الحركي حول O تعطي :

$$\frac{d\vec{G}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{G}_0 = \vec{a} \Rightarrow G_0^2 = a^2 \Rightarrow A^2(p_1^2 + q_1^2 + 4r_1^2) = a^2$$

a ثابت تكامل ، ومنه تكامل العزم الحركي :

$$A^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi) = a^2 \qquad (2)$$

(9)

والتكامل الأولي الثالث فنحصل بمكاملة طرفي المعادلة الثالثة من معادلات أولر :

$$r = r_0 \Rightarrow \dot{\varphi}\cos\theta = r_0$$

r_0 ثابت تكامل ؛ (3)

و . هـ . م .

ج : انطلاقاً من تعريف الطاقة الحركية لجسم، ومن الشكل المرسوم نجد : [23]

$$2T = \int_V \vec{V}^2 dm = \int_V (\vec{\omega} \wedge \vec{OA})^2 dm \qquad ;$$

$\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$ سرعته ، A في الجسم كتلته dm

$\vec{\omega} = p_1\vec{i}_1 + q_1\vec{j}_1 + r_1\vec{k}_1 \,,\; \vec{OA} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$

$Ox_1y_1z_1$ جملة متحركة مع الجسم

$$= \int_V [(q_1 z_1 - r_1 y_1)\vec{i}_1 + (r_1 x_1 - p_1 z_1)\vec{j}_1 + (p_1 y_1 - q_1 x_1)\vec{k}_1]^2 dm$$

$$= \int_V [(q_1 z_1 - r_1 y_1)^2 + (r_1 x_1 - p_1 z_1)^2 + (p_1 y_1 - q_1 x_1)^2] dm$$

$$= \int_V [p_1^2(y_1^2 + z_1^2) + q_1^2(z_1^2 + x_1^2) + r_1^2(x_1^2 + y_1^2) - 2q_1 r_1 y_1 z_1 - 2r_1 p_1 z_1 x_1 - 2p_1 q_1 x_1 y_1] dm$$

نوزع التكامل على الجمع :

$$= p_1^2 \int_V (y_1^2 + z_1^2) dm + q_1^2 \int_V (z_1^2 + x_1^2) dm + r_1^2 \int_V (x_1^2 + y_1^2) dm - 2q_1 r_1 \int_V z_1 y_1 dm$$
$$- 2r_1 p_1 \int_V z_1 x_1 dm - 2p_1 q_1 \int_V x_1 y_1 dm \qquad (1)$$

(9)

وحسب تعريف عزوم العطالة :

$$I_{x_1} = \int_V (y_1^2 + z_1^2) dm \,,\; I_{y_1} = \int_V (x_1^2 + z_1^2) dm \,,\; I_{z_1} = \int_V (x_1^2 + y_1^2) dm$$

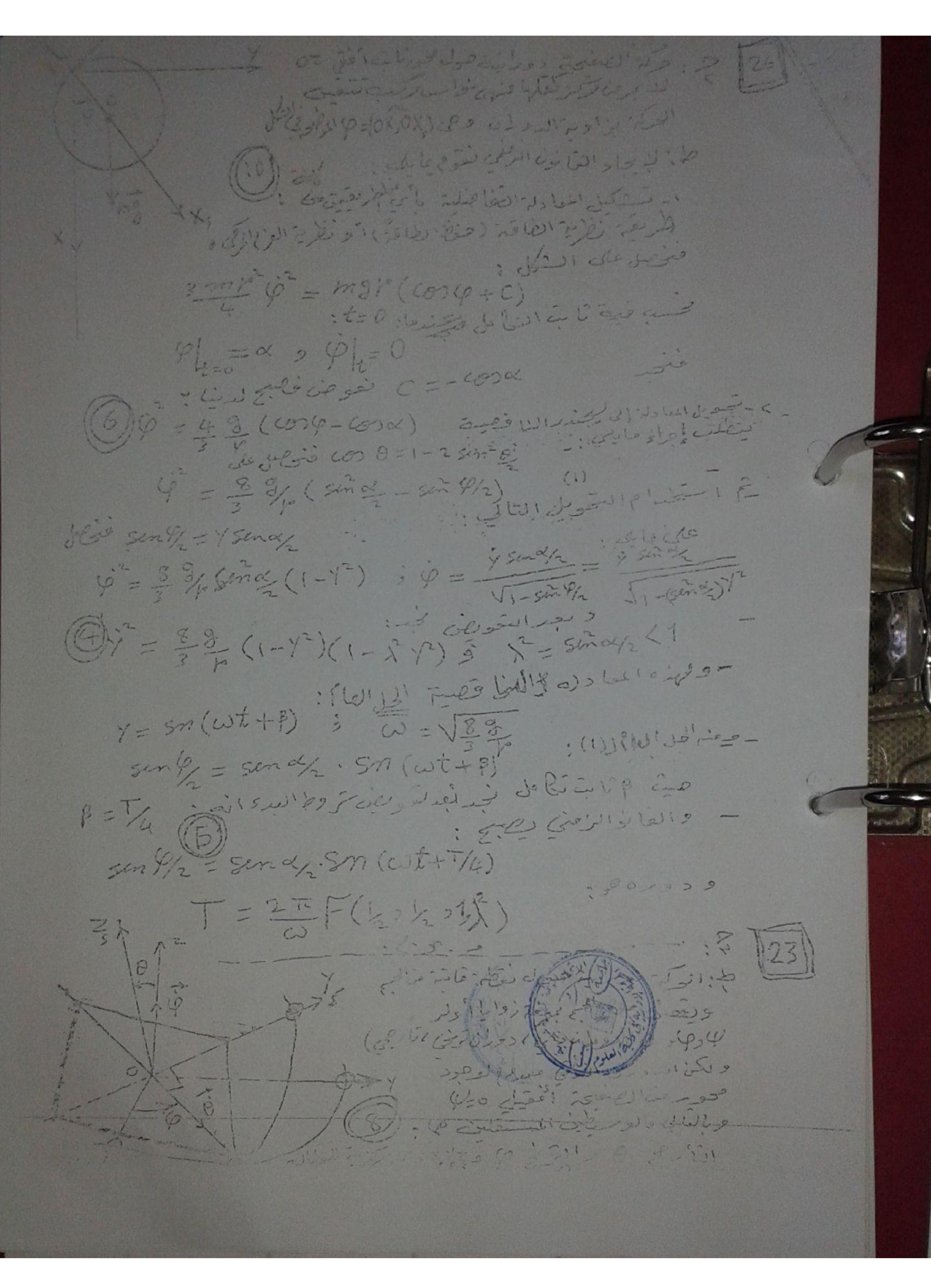
وحسب تعريف جداءات العطالة :

$$P_{y_1z_1} = \int_V y_1 z_1 dm \,,\; P_{x_1z_1} = \int_V x_1 z_1 dm \,,\; P_{x_1y_1} = \int_V x_1 y_1 dm$$

(6)

نعوض في (1) نجد :

$$2T = I_{x_1}p_1^2 + I_{y_1}q_1^2 + I_{z_1}r_1^2 - 2P_{y_1z_1}q_1 r_1 - 2P_{x_1z_1}p_1 r_1 - 2P_{x_1y_1}p_1 q_1 \qquad A = I_{x_1},\; B = I_{y_1},\; C = I_{z_1}$$



26

ج٢: حركة الصفيحة دورانية حول المحور الثابت الأفقي OZ لا يمر من مركز ثقلها فهي نواس مركب تتعين الحركة بزاوية الدوران و هي $\varphi = (OX_1, OX)$ الموضحة في الشكل

ط: لإيجاد القانون الزمني نقوم بما يلي:

(10)

١- تشكيل المعادلة التفاضلية بأي طريقة من الطرق: طريقة نظرية الطاقة (حفظ الطاقة) أو نظرية العزم الحركي، فنحصل على الشكل:

$$\frac{3mr^2}{4}\dot{\varphi}^2 = mgr(\cos\varphi + C)$$

نحسب قيمة ثابت التكامل من الشروط: $t=0$:

$$\varphi|_{t=0} = \alpha \quad , \quad \dot{\varphi}|_{t} = 0$$

فنجد $C = -\cos\alpha$ نعوض فيصبح لدينا:

(6)

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{r}(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

٢- تحويل المعادلة إلى الجيب الناقصي يتطلب إجراء ما يلي: نعوض $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ فنحصل على

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{r}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

ثم استخدام التحويل التالي: $\sin\frac{\varphi}{2} = Y\sin\frac{\alpha}{2}$ فنحصل على:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{r}\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-Y^2) \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{Y}\sin\alpha/2}{\sqrt{1-\sin^2\varphi/2}} = \frac{\dot{Y}\sin\alpha/2}{\sqrt{1-(\sin^2\frac{\alpha}{2})Y^2}}$$

وبعد التحويل نجد:

(4)

$$\dot{Y}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{r}(1-Y^2)(1-\lambda^2Y^2) \quad ; \quad \lambda^2 = \sin^2\alpha/2 < 1$$

- ولهذه المعادلة الحل العام:

$$Y = \operatorname{sn}(\omega t + \beta) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{r}}$$

- ومنه الحل العام (1):

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot \operatorname{sn}(\omega t + \beta)$$

حيث β ثابت تكامل نجده بعد التعويض بشروط البدء أنه $\beta = T/4$

(5)

- والقانون الزمني يصبح:

$$\sin\varphi/2 = \sin\alpha/2 \cdot \operatorname{sn}(\omega t + T/4)$$

ودوره هو:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda^2\right)$$

23

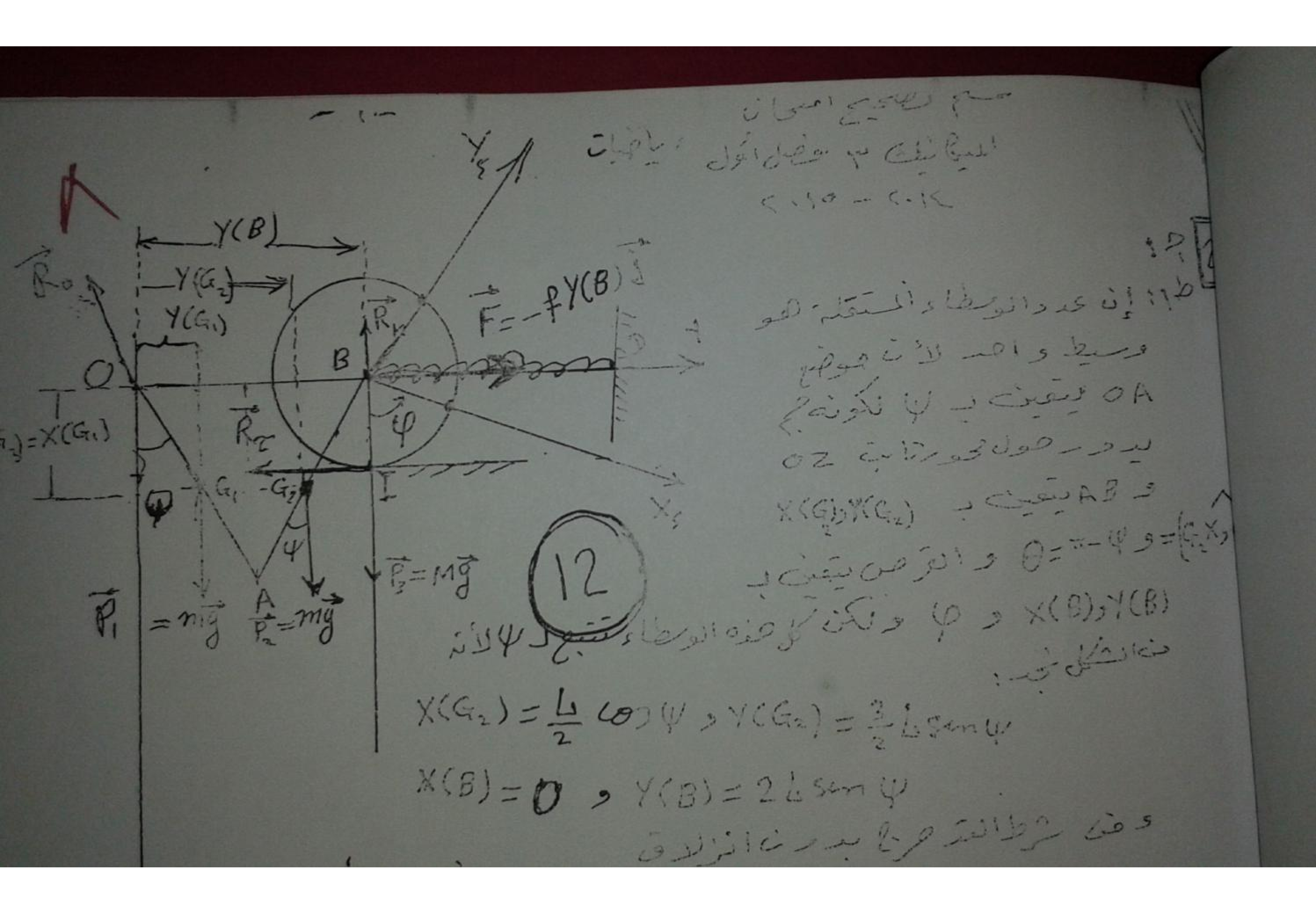
ج٢:

ط: الحركة ... حول نقطة ثابتة ... ويتعين ... بزوايا أولر ψ و φ ... (دوران ... ذاتي)

ولكن ... لوجود محور ... الصفيحة الحقيقي $\psi = 0$

وبالتالي والوسيطين المستقلين هما:

(8)



سلم تصحيح امتحان
الميكانيك ٣ فصل أول رياضيات
٢٠١٤ - ٢٠١٥

ج١:

ط١: إن عدد الوسطاء المستقلة هو وسيط واحد لأن موضع OA يتعين بـ ψ لكونه يدور حول محور ثابت OZ و AB يتعين بـ X(G2),Y(G2) و $(G_2X, ...) = \pi - \psi = \theta$ و القرص يتعين بـ X(B),Y(B) و φ ولكن كل هذه الوسطاء تتعلق بـ ψ لأنه حسب الشكل نجد:

$X(G_2) = \frac{L}{2}\cos\psi$, $Y(G_2) = \frac{3}{2}L\sin\psi$

$X(B) = 0$, $Y(B) = 2L\sin\psi$

ومن شرط التدحرج بدون انزلاق

$$r\dot{\varphi} = -\dot{y}(B) = -2L\dot{\psi}\cos\psi$$

وبالتالي يمكن أن نأخذ ψ وسيطاً مستقلاً وحيداً

ط: إن أقصر طريقة هي نظرية الطاقة الحركية (قانون انحفاظ الطاقة) حيث القوى الفعالة كمونية وهي قوى الثقالة وقوة مرونة النابض ويكفي للدراسة معادلة واحدة:

(2) $$T_0 = U + h \qquad (1)$$

U دالة الكمون

حساب الطاقة الحركية:

$$T_0 = T_0(OA) + T_0(AB) + T_0(B, r) \qquad (2)$$

$$T_0(OA) = \frac{I_0}{2}\dot{\psi}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2 \quad , \quad T_0(AB) = \frac{m}{2}V^2(G_2) + \frac{I_{G_2}(AB)}{2}\dot{\psi}^2$$ كونيغ:

$$V^2(G_2) = \frac{L^2}{4}\dot{\psi}^2(1+8\cos^2\psi) \quad ; \quad I_{G_2}(AB) = \frac{m}{12}L^2$$

نعوض فنجد:

$$T_0(AB) = mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6}+\cos^2\psi\right)$$

كونيغ للصفيحة:

$$T_0(B, r) = 2L^2M\dot{\psi}^2\cos^2\psi + \frac{Mr^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

ومن شرط التدحرج بدون انزلاق نجد:

$$T_0(B, r) = 2L^2M\dot{\psi}^2\cos^2\psi + ML^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi = 3ML^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi$$

نعوض في (2) ونختزل فنجد:

(8) $$T_0 = \left[\frac{m}{2} + (m+3M)\cos^2\psi\right]L^2\dot{\psi}^2 \qquad (3)$$

$$\ldots = \frac{\ldots}{4}\dot{\psi}^2(1+8\cos^2\psi) \quad ; \quad I_{G_2}(AB) = \frac{\ldots}{12}L^2$$

نعوض فنجد:

$$T_0(AB) = mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6} + \cos^2\psi\right)$$

كونيغ للصفيحة:

$$T_0(B,P) = 2L^2M\dot{\psi}^2\cos^2\psi + \frac{Mr^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

ومن شرط التدحرج بدون انزلاق نجد:

$$T_0(B,P) = 2L^2M\dot{\psi}^2\cos^2\psi + ML^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi = 3ML^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi$$

نعوض في (2) ونختزل فنجد:

(8)

$$T_0 = \left[\frac{m}{3} + (m+3M)\cos^2\psi\right]L^2\dot{\psi}^2 \qquad (3)$$

وبسهولة نجد:

$$U = +\int mg\,dX(G_1) + \int mg\,dX(G_2) + \int -f\,Y(B)\,dY(B) +$$

$$= mgL\cos\psi - 2fL^2\sin^2\psi \qquad (4)$$

(4)

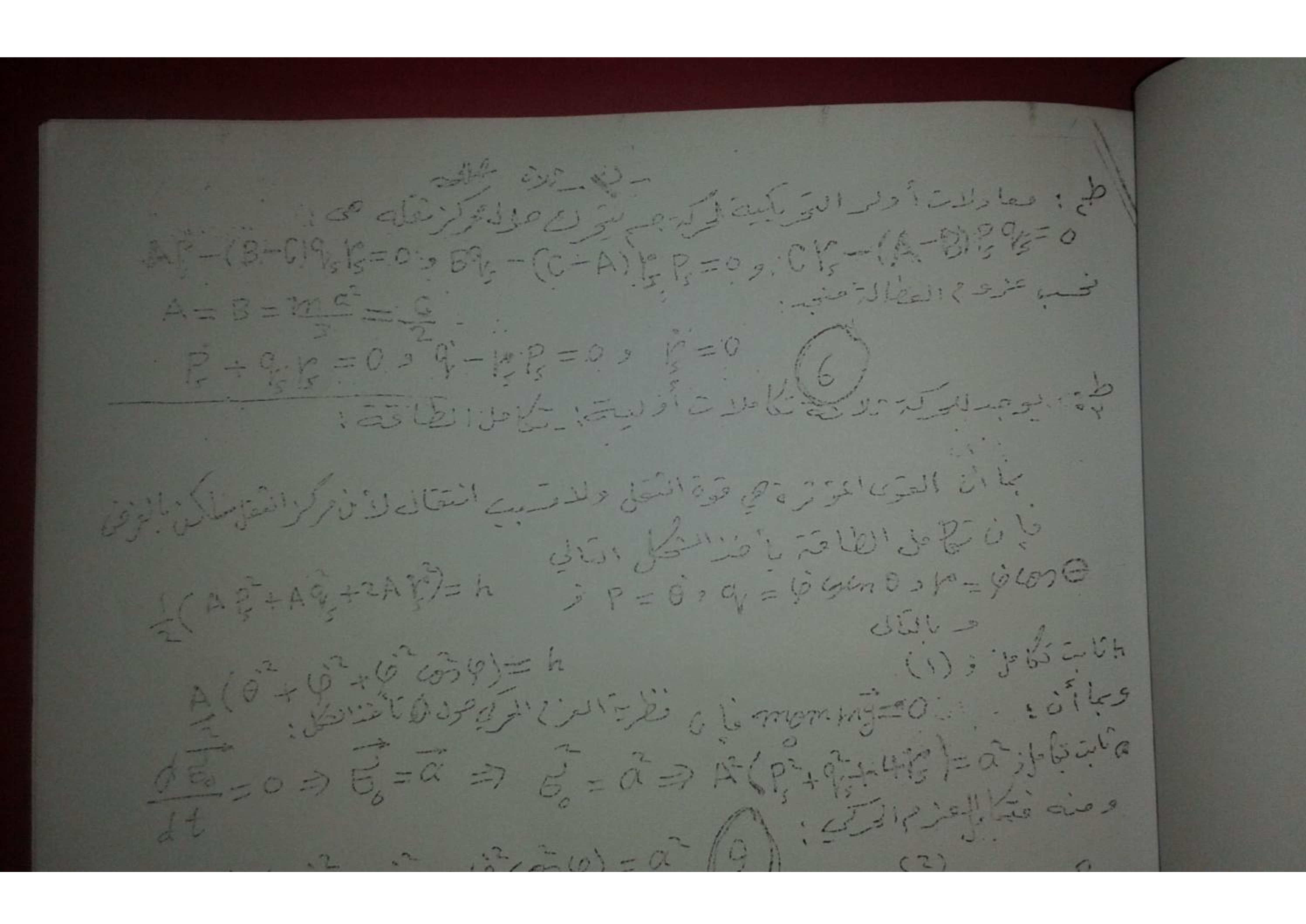
و $\overrightarrow{P_1}$ عمل $= \overrightarrow{R_C}$ عمل $= \overrightarrow{R_H}$ عمل $= \overrightarrow{R_0}$ عمل $= 0$ لأنها لا تسبب انتقال، نعوض (3) و(4) في (2) نجد:

$$\left[\frac{m}{3} + (m+3M)\cos^2\psi\right]L^2\dot{\psi}^2 = mgL\cos\psi - 2fL^2\sin^2\psi + h$$

وبعد حساب h في لحظة البدء تصبح المعادلة من الشكل:

(2)

F.M



ط١: معادلات أويلر التركيبية لحركة جسم يتحرك حول مركز ثقله هي:

$$A\dot{p}_s-(B-C)q_s r_s=0 \quad , \quad B\dot{q}_s-(C-A)r_s p_s=0 \quad , \quad C\dot{r}_s-(A-B)p_s q_s=0$$

نحسب عزوم القصور فنجد:

$$A=B=\frac{ma^2}{2}=\frac{C}{2}$$

$$\dot{p}_s+q_s r_s=0 \quad , \quad \dot{q}_s-r_s p_s=0 \quad , \quad \dot{r}_s=0$$

(6)

ط٢: يوجد للحركة ثلاثة تكاملات أولية: تكامل الطاقة:

بما أن القوى المؤثرة هي قوة الثقل ولا تسبب انتقال لأن مركز الثقل ساكن بالفرض

فإن تكامل الطاقة يأخذ الشكل التالي

$$\frac{1}{2}(A\dot{p}_s^2+A\dot{q}_s^2+2A\dot{r}_s^2)=h$$

و $p=\dot{\theta}$ ، $q=\dot{\varphi}\sin\theta$ ، $r=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta$

وبالتالي

$$\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2\cos(\varphi))=h$$

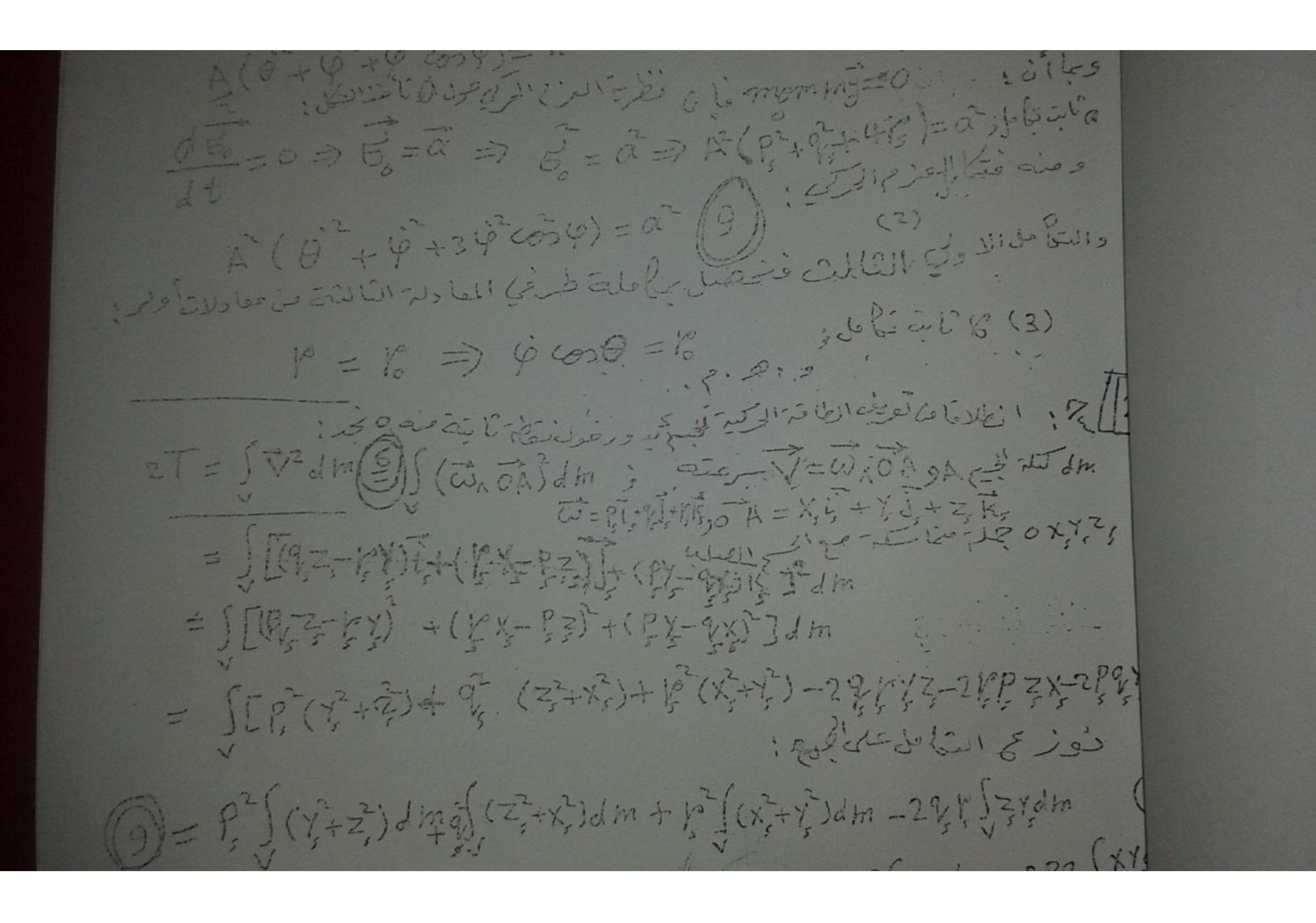
h ثابت تكامل ، (1)

وبما أن: $mom\, m\vec{g}=0$ فإن نظرية العزم الحركي حول O تأخذ الشكل:

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}=0 \Rightarrow \vec{\sigma}_0=\vec{a} \Rightarrow \sigma_0^2=a^2 \Rightarrow A^2(p_s^2+q_s^2+4r_s^2)=a^2$$

a ثابت تكامل ، ومنه تكامل العزم الحركي:

(9) = a^2 ... (2)



وبما أن : $mom_{Mg} = 0$ فإن نظرية العزم الزاوي حول O تأخذ الشكل :

$$\frac{d\vec{H}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{H}_o = \vec{a} \Rightarrow H_o^2 = a^2 \Rightarrow A^2(p_1^2 + q_1^2 + 4r_1^2) = a^2$$ ثابت تكامل

ومنه فتكامل العزم الحركي :

$$A^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 3\dot{\psi}^2 \cos^2\varphi) = a^2 \quad (2)$$

والتكامل الأول الثالث فنحصل بمكاملة طرفي المعادلة الثالثة من معادلات أولر :

$$r = r_0 \Rightarrow \dot{\psi}\cos\theta = r_0 \quad (3)$$ ثابت تكامل

هـ . م . د

س 2 : انطلاقاً من تعريف الطاقة الحركية لجسم صلب حول نقطة ثابتة منه نجد :

$$2T = \int_V \vec{V}^2 dm = \int_V (\vec{\omega} \wedge \vec{OA})^2 dm$$ ؛ dm كتلة الجسم A وسرعته $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$

$\vec{\omega} = p_1\vec{i}_1 + q_1\vec{j}_1 + r_1\vec{k}_1$ ، $\vec{OA} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$ ، $Ox_1y_1z_1$ جملة مرتبطة مع الجسم الصلب

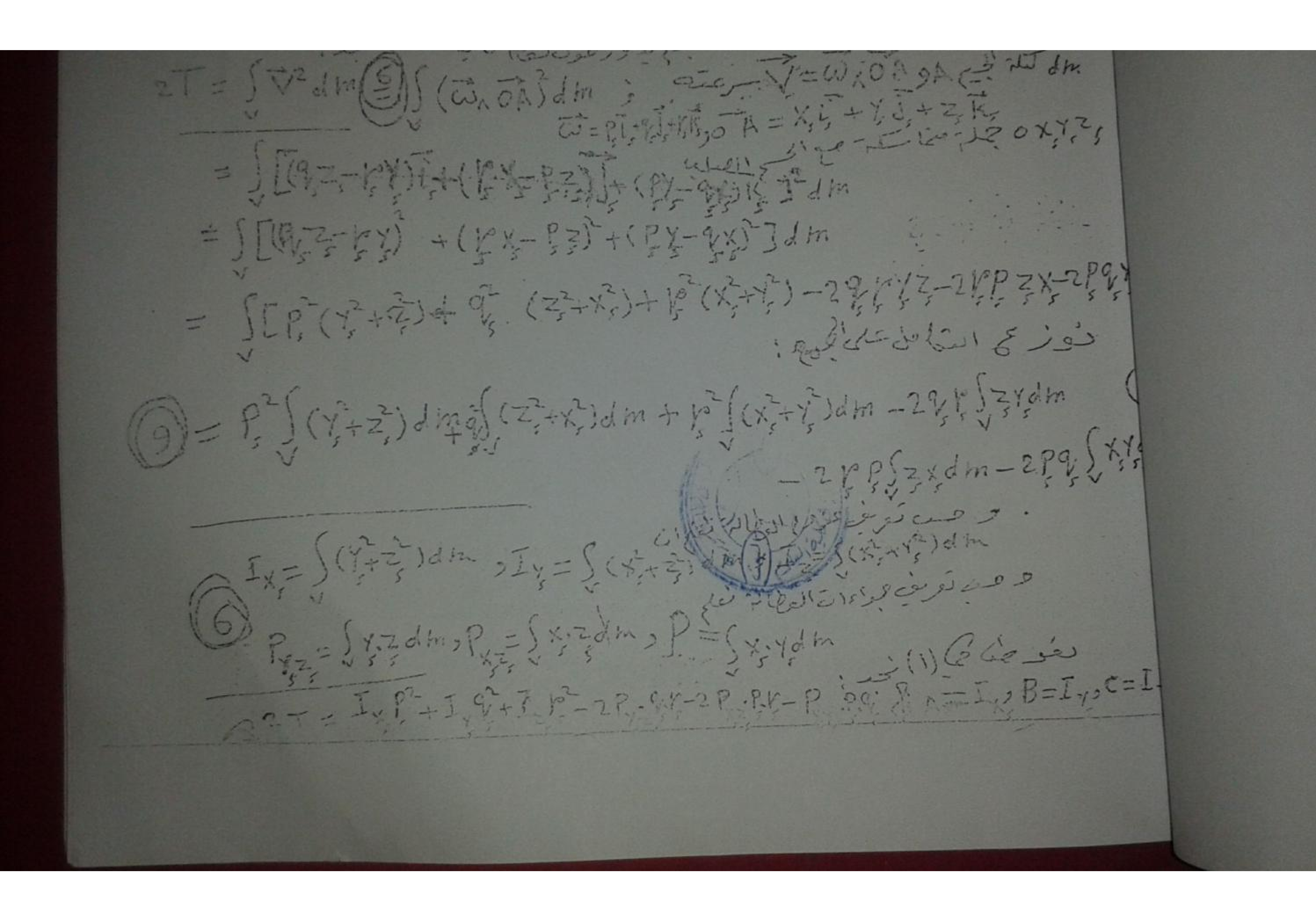
$$= \int_V [(q_1 z_1 - r_1 y_1)\vec{i}_1 + (r_1 x_1 - p_1 z_1)\vec{j}_1 + (p_1 y_1 - q_1 x_1)\vec{k}_1]^2 dm$$

$$= \int_V [(q_1 z_1 - r_1 y_1)^2 + (r_1 x_1 - p_1 z_1)^2 + (p_1 y_1 - q_1 x_1)^2] dm$$

$$= \int_V [p_1^2(y_1^2 + z_1^2) + q_1^2(z_1^2 + x_1^2) + r_1^2(x_1^2 + y_1^2) - 2q_1 r_1 y_1 z_1 - 2r_1 p_1 z_1 x_1 - 2p_1 q_1 x_1 y_1]$$

نوزع التكامل على الجمع :

$$= p_1^2 \int_V (y_1^2 + z_1^2) dm + q_1^2 \int_V (z_1^2 + x_1^2) dm + r_1^2 \int_V (x_1^2 + y_1^2) dm - 2q_1 r_1 \int_V z_1 y_1 dm$$



$2T = \int_V V^2\, dm = \int_V (\vec{\omega} \wedge \vec{OA})^2\, dm$; حيث $\vec{V} = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$ سرعته A لكتلة dm

$\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$, $\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ في جملة $oxyz$

$= \int_V [(qz - ry)\vec{i} + (rx - pz)\vec{j} + (py - qx)\vec{k}]^2\, dm$

$= \int_V [(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2]\, dm$

$= \int_V [p^2(y^2+z^2) + q^2(z^2+x^2) + r^2(x^2+y^2) - 2qr\,yz - 2rp\,zx - 2pq\,xy]\, dm$

نوزع التكامل على الجمع:

$= p^2\int_V (y^2+z^2)\,dm + q^2\int_V (z^2+x^2)\,dm + r^2\int_V (x^2+y^2)\,dm - 2qr\int_V zy\,dm$

$- 2rp\int_V zx\,dm - 2pq\int_V xy\,dm$

وحسب تعريف عزوم العطالة

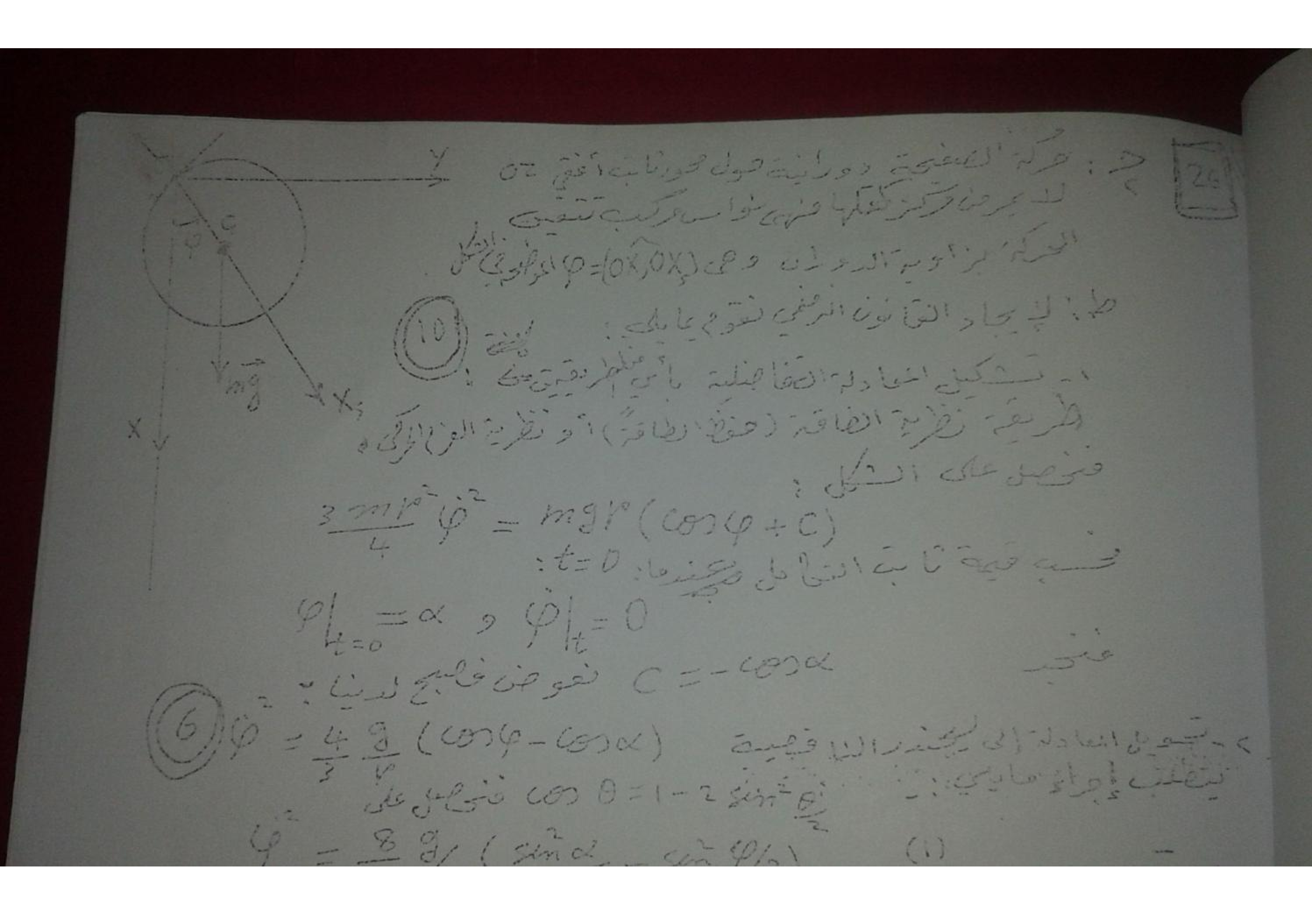
$I_x = \int_V (y^2+z^2)\,dm$, $I_y = \int_V (x^2+z^2)\,dm$, $I_z = \int_V (x^2+y^2)\,dm$

وحسب تعريف جداءات العطالة

$P_{yz} = \int_V yz\,dm$, $P_{xz} = \int_V xz\,dm$, $P_{xy} = \int_V xy\,dm$

نعوض في (1) نجد

$2T = I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2 - 2P_{yz}qr - 2P_{xz}pr - P_{xy}pq$; $A = I_x$, $B = I_y$, $C = I_z$



24

ج: حركة الصفيحة دورانية حول محور ثابت أفقي Oz

لا يمر من مركز ثقلها فهي نواس مركب تتعين

الحركة بزاوية الدوران وهي $\varphi = (\widehat{OX, OX_1})$ المرافقة بالشكل

ط: لإيجاد القانون الزمني نقوم بما يلي:

(10)

1- تشكيل المعادلة التفاضلية بأي طريقة كانت: طريقة نظرية الطاقة (حفظ الطاقة) أو نظرية العزم الحركي فنحصل على الشكل:

$$\frac{3mr^2}{4}\dot{\varphi}^2 = mgr(\cos\varphi + C)$$

نحسب قيمة ثابت التكامل عندما $t=0$:

$$\varphi|_{t=0} = \alpha \quad و \quad \dot{\varphi}|_{t} = 0$$

فنجد $C = -\cos\alpha$ نعوض فيصبح لدينا:

(6) $$\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{r}(\cos\varphi - \cos\alpha)$$

2- تحويل المعادلة إلى ... تكاملية يتطلب إجراء ما يلي:

$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ فنحصل على

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{8}{\ }\frac{g}{\ }(\sin^2\alpha \ \ \sin^2\varphi/2) \quad (1)$$

$t=0$

نعوض فيصبح لدينا: $C = -\cos\alpha$

٢- تحويل المعادلة إلى الصورة التالية يتطلب إجراء ما يلي:

(6) $\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)$

نستخدم $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ فنحصل على

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \quad (1)$$

- ثم باستخدام التحويل التالي:

$\sin\frac{\varphi}{2} = y\sin\frac{\alpha}{2}$ فنحصل على ما يلي:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{l}\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 - y^2) \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{y}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = \frac{\dot{y}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - (\sin^2\frac{\alpha}{2})y^2}}$$

- وبعد التعويض نجد:

(4) $\dot{y}^2 = \frac{8}{3}\frac{g}{l}(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2)$ و $\lambda^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2} < 1$

- ولهذه المعادلة الأخيرة يكون الحل العام:

$$y = \sin(\omega t + \beta) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{l}}$$

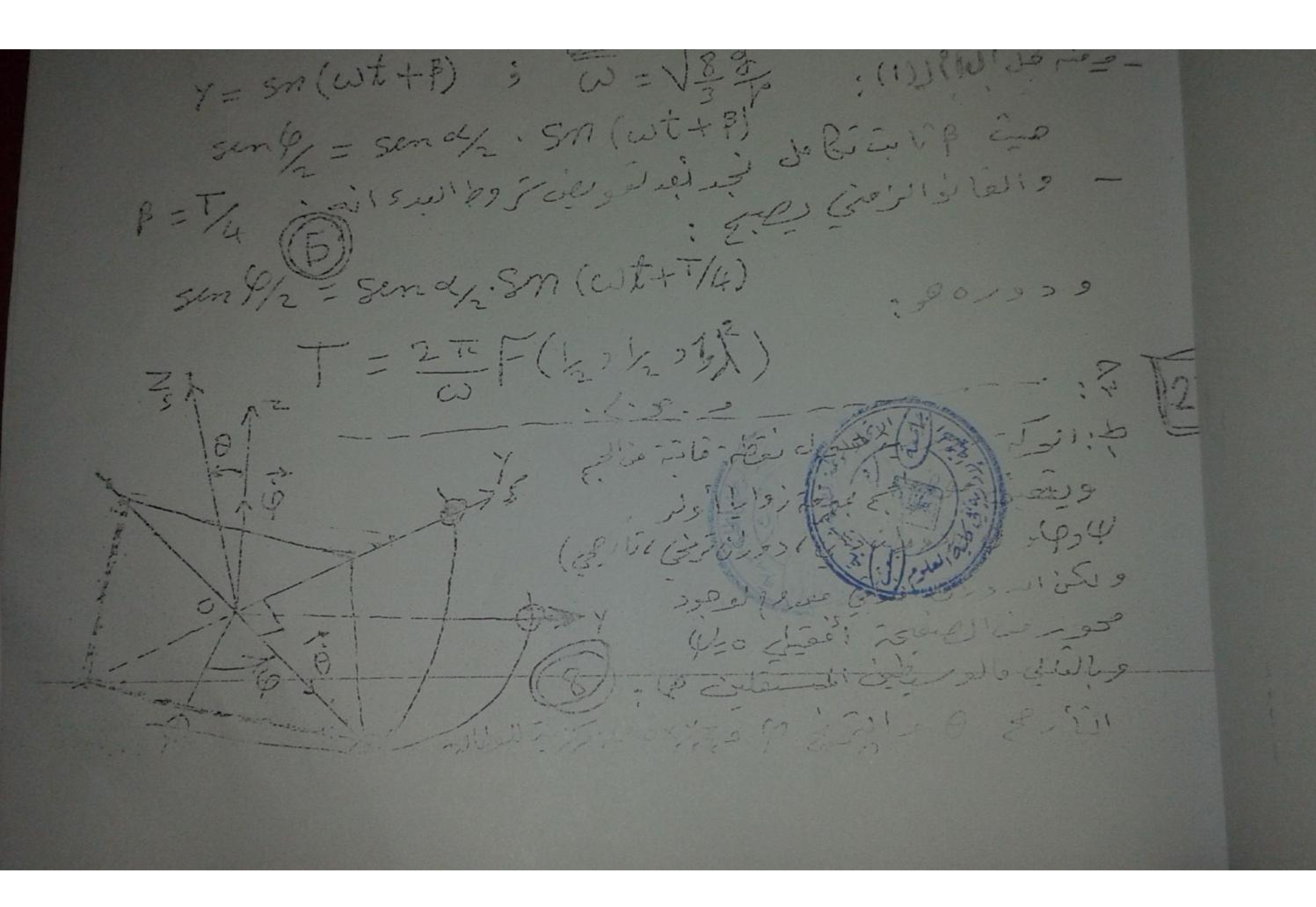
- ومن الحل العام (1):

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(\omega t + \beta)$$

حيث β ثابت تكامل نجده بعد التعويض بشروط البدء أنه: $\beta = T/4$

- والقانون الزمني يصبح:

(5) $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin(\omega t + T/4)$



$Y = \sin(\omega t + \beta)$; $\omega = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{\ell}}$

$\sin \varphi/2 = \sin \alpha/2 \cdot \sin(\omega t + \beta)$

$\beta = T/4$

(5)

$\sin \varphi/2 = \sin \alpha/2 \cdot \sin(\omega t + T/4)$

$T = \frac{2\pi}{\omega} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda^2)$

(8)

جامعة البعث

كلية العلوم ـ ـ

امتحان مقرر الميكانيك ٣

بتاريخ ٢٠١٤/٢/١٠

المدة : ساعتان

العلامة : ١٠٠

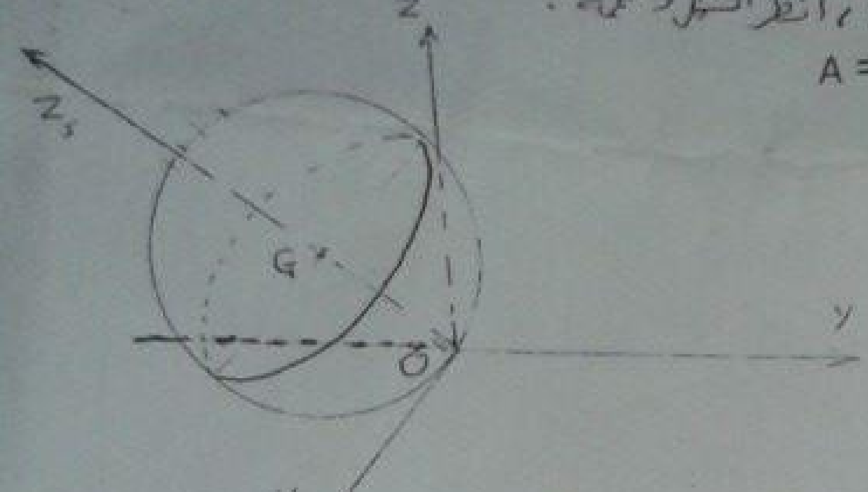
38

س ١ : حل المسألة التالية :

تتحرك كرة S، متجانسة وثقيلة كتلتها M ونصف قطرها =L، حول نقطة O ثابته من سطحها ؛ أوجد مايلي :



- الوسطاء المستقلة مصحوبا" بالرسم علما" أن المحور oz_s قطري ،
- معادلات أولر التحريكية علما"أن: $A = B = \frac{7}{5} ML^2 \quad C = \frac{2}{5} L^2 M$
- التكاملات الأولية بدلالة الوسطاء المستقلة علما"أن شروط البدء :



$$\theta\Big|_{t=0} = \frac{\pi}{3} \; , \quad \vec{\omega}\Big|_{t=0} = \sqrt{\frac{35g}{L}}\ \vec{K}$$

62

س٣: أجب عن سؤالين مما يلي :

أ- إن المعادلة: $\dot{\theta}^2 \sin^2\theta = (\cos\theta)\frac{10g}{7.L}(\cos\theta - \frac{1}{2})(\cos\theta - 2)$

توافق الحركة التأرجحية لجسم يدور حول نقطة ثابتة منه وشروط البدء هي:

$$\dot{\theta}\Big|_{t=0} = 0 \quad , \quad \theta\Big|_{t=0} = \pi/3$$

أوجد القانون الزمني لهذه الحركة .

ب- تتحرك الكرتان (B_1 ، r) و(B_2 و r) على مستقيم أفقي وكتلتاهما على الترتيب M_1 ، M_2 إذا علمت أن القياسين الجبريين لسرعتيهما بلغا قبل التصادم مباشرة V_1 ، V_2 على الترتيب فالمطلوب :
أوجد W_1 و W_2 القياسين الجبريين لسرعتيهما بعد التصادم مباشرة ، حيث e عامل المرونة ، ثم استنتجهما في الحالات :e=1 ، $e = \frac{1}{2}$ ، e = o و سم أنواع الصدم الموافق

ت- إذا كان الجسم الصلب S يدور حول نقطه ثابتة منه O ، فاثبت أن :

$$2T_0 = A.P_s^2 + B.q_s^2 + C.r_s^2 - 2D.q_s.r_s - 2E.r_s.P_s - 2F.p_s.q_s$$

منطلقا" من التعريف:

$$2T_0 = \int_S \vec{V}^2 dm \quad ; \quad$$ dm الذي كتلته M سرعة الجسيم $\vec{V}$

انتهت الأسئلة بالتوفيق

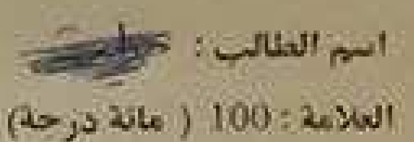
د : كامل محمد

جامعة البعث
كليـة العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الميكانيك ٣

السنة الثالثة رياضيات

الدورة الإضافية 2014 - 2015

اسم الطالب : 

العلامة : 100 (مائة درجة)

المدة : ساعة ونصف

السؤال الأول(35درجة):

الصفيحة $A_1A_2A_3A_4$ المستطيلة، التي طولها $A_1A_2 = A_3A_4 = 2a$ ، وعرضها $A_1A_4 = A_2A_3 = 2b$ ، تتحرك في المستوي الشاقولي النظامي OXY حيث OX شاقولي هابط، و OY أفقي، وقيدناها بخيطين، يصل أحدهما بين النقطة الثابتة O والرأس A_1 ، ويصل الخيط الثاني بين نقطة ثابتة أخرى O_1 (واقعة على OY) والرأس A_4 حيث $|OO_1| = 2b$ ، المطلوب:

1) ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة.
2) أوجد القانون الزمني لحركة الصفيحة، انطلاقاً من نظرية الطاقة.
3) أوجد كلاً من ردي فعل الخيطين بدلالة الوسطاء المستقلة فقط.

السؤال الثاني(28درجة):

إذا تصادمت كرتان، كتلتاهما m_2 ، m_1 ، تصادماً مباشراً، مرناً ،ومعامل مرونته e وكانت سرعتاهما قبل التصادم مباشرة (في بداية الظاهرة)، v_2 ، v_1 ، على الترتيب، فالمطلوب:

1) أوجد كلاً من سرعتيهما بعد التصادم مباشرة (في نهاية الظاهرة).
2) إذا كان $e = \frac{1}{3}$ ، فأوجد الطاقة الحركية المفقودة.

السؤال الثالث(37 درجة):

كرة متجانسة ثقيلة ، كتلتها m ونصف قطرها a ، تتحرك حول نقطة ثابتة O واقعة على سطحها،فإذا علمت أن $I_G = \frac{3}{5} m\, a^2$ (G مركز الكتل، و OZ_3 يمر من G)، فالمطلوب مايلي:

1) ارسم الشكل المناسب بالتفصيل، وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الكرة.
2) شكّل معادلات أولر التحريكية المناسبة.
3) أوجد التكاملات الأولية بدلالة الوسطاء المستقلة الكافية لإيجاد حل معادلات الحركة.
4) أوجد θ^2 كدالة تابعة لـ θ فقط.

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ——— مدرس المقرر: د.كامل محمد

جامعة البعث
كليـة العلوم

امتحان مقرر الميكانيك 3

اسم الطالب: عبير السعد
العلامة: 100 (مائة درجة)
المدة: ساعة ونصف

السنة الثالثة رياضيات– الفصل الأول 2014 - 2013
الثاني

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول (30)

إذا كان الجسم الصلب يتحرك في الفضاء الثلاثي الأبعاد حول نقطة ثابتة منه O، فأثبت أن:

$$2T_0 = A\, p_s^2 + B\, q_s^2 + C\, r_s^2 - 2D\, q_s r_s - 2E\, p_s r_s - 2F\, q_s p_s$$

السؤال الثاني (34)

إذا كانت الصفيحة الصلبة المربعة المتجانسة التي طول ضلعها L وكتلتها m، تتحرك تحت تأثير ثقلها في المستوي الشاقولي وكان أحد رؤوسها ثابتاً مايلي:

1. أوجد الوسطاء المستقلة مع الرسم الواضح.
2. أوجد المعادلات التفاضلية للحركة.
3. أوجد القانون الزمني للحركة، علماً أنه في لحظة البدء كان قطر الصفيحة المار من الرأس الثابت يميل بزاوية α عن المحور الشاقولي النازل وتحركت الصفيحة بدون سرعة ابتدائية.

السؤال الثالث (36)

يتحرك، في الفضاء الثلاثي الأبعاد، مخروط دوراني قائم صلب وثقيل، كتلته m ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه $h = \sqrt{3} \cdot R$، علماً أن رأسه O ثابت وأن عزم عطالته بالنسبة لرأسه O يساوي: $\frac{21\, m R^2}{10}$ وعزم عطالته بالنسبة لمحور تناظره الهندسي يساوي: $\frac{3 m R^2}{10}$، فالمطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب موضحاً عليه الوسطاء المستقلة والقوى المؤثرة على هذا الجسم.
2. أوجد $\vec{\sigma}_0$ بدلالة مركبات متجه الدوران على المحاور المتماسكة مع المخروط، ثم أوجد عزم القوى المؤثرة عليه بالنسبة لـ O.
3. أوجد مسقط $\vec{\sigma}_0$ على محور التناظر الهندسي للمخروط ثم أوجد مسقط $\vec{\sigma}_0$ على الشاقول، كل ذلك بدلالة مركبات متجه دوران المخروط على المحاور المتماسكة معه.
4. أوجد الطاقة الحركية T_0 ثم أوجد عمل القوى المؤثرة على المخروط.

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ——— مدرس المقرر: د.كامل محمد

جامعة البعث — امتحان مقرر الميكانيك 3 — الاسم: محمد الحسين

كلية العلوم- قسم الرياضيات — سنة ثالثة رياضيات — الدرجة: 100

فصل ثاني 2014 – 2015 — المدة: ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول (2 X 21): أجب عن سؤالين فقط مما يلي:

أ) استنتج معادلة ميتشورسكي.

ب) إذا تصادمت كرتان صغيرتان كتلتاهما m_1 و m_2، مرنتان، وكان معامل ارتدادهما (معامل مرونتهما) $e=\frac{1}{2}$ ، وتصادمهما مباشراً ، فالمطلوب:

أوجد سرعتيهما بعد التصادم مباشرة، علماً بأن سرعتيهما قبل التصادم مباشرة كانتا: v_1 و v_2.

ج) إذا كان الجسم الصلب صفيحة دائرية كتلتها m ونصف قطرها r ، تتحرك في المستوي الشاقولي OXY ، بحيث تنزلق على المحور الخشن OX بتأثير قوة جر أفقية ثابتة $\vec{F}=F\vec{i}$ ، مطبقة في G (مركز كتل الصفيحة) ، وإذا علمت أن الصفيحة بدأت الحركة من السكون فوراً ومن موضع ابتدائي لمركزها G هو $(0\ ,\ r)$ ، وأن معامل الاحتكاك بين محيط القرص والمحور OX هو μ، فالمطلوب: أ - أوجد كلاً من ردي الفعل الناظمي والمماسي. ب- أوجد القانون الزمني للحركة.

السؤال الثاني (22): إذا كان الجسم الصلب صفيحة مربعة متجانسة طول ضلعها L وكتلتها m وهذه الصفيحة تتحرك في المستوي الشاقولي OXY، تحت تأثير ثقلها فقط ، ولكن النقطة الثابتة O تقع في منتصف أحدى أضلاعها وفي لحظة البدء كانت سرعتها معدومة وكان المتجه $\overrightarrow{OG}$ يصنع مع الشاقول الهابط OX زاوية α، حيث G مركز كتل الصفيحة، فالمطلوب:

1) حدد نوع الحركة، وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع الصفيحة، موضحاً ذلك بالرسم المناسب. 2) أوجد القانون الزمني للحركة مستخدماً أقصر طريقة.

السؤال الثالث (36): يتحرك جسم صلب ثقيل، كتلته m ، حول نقطة ثابتة O منه ، ويتعين مركز كتله G ، في الجملة المتماسكة معه $OX_1Y_1Z_1$ بإحداثياته $(0\ ,\ 0\ ,\ \frac{L}{2})$، وإذا علمت أن:

$P_{Z_1X_1}=P_{Y_1Z_1}=P_{X_1Y_1}=0$ وأن $I_O=\frac{mL^2}{2}$ و $I_{Z_1}=\frac{mL^2}{6}$ و $I_{X_1}=I_{Y_1}$ ، فالمطلوب:

1) ما هي الوسطاء المستقلة وسمها؟ ولماذا؟ وضح ذلك بالرسم المناسب، بغض النظر عن شكل الجسم، وأي حالة خاصة توافق هذه الحركة؟ 2)أوجد معادلات أولر التحريكية المناسبة. 3) أوجد التكاملات الأولية المناسبة لهذه الحالة.

~~4) أوجد المعادلة التفاضلية التي تعين حركة OZ_1 فقط~~

انتهت الأسئلة